LATIHAN & PEMBAHASAN SOAL DISTRIBUSI PELUANG DISKRIT

Disusun Untuk Memenuhi Salah Satu Tugas Mata Kuliah
PENGANTAR TEORI PELUANG

Dosen :
Ir. Agus Purwoto, M.Si

KELAS I – D

Disusun Oleh :

RASYID RIDHA
NIM. 10.6428

SEKOLAH TINGGI ILMU STATISTIK
JAKARTA
2011

SOAL !

1. **Distribusi Hipergeometrik**
(Sumber : *Teknik Statistika untuk BISNIS & EKONOMI Edisi ke-9 Jilid 1*; Robert D. Mason, Douglas A. Lind; hal. 261)
Profesor Jon Hammer mempunyai kumpulan 15 pertanyaan pilihan berganda tentang distribusi probabilitas.Empat dari pertanyaan tersebut merupakan soal tentang distribusi hipergeometrik.Berapa probabilitas sekurang – kurangnya 1 dari kumpulan pertanyaan ini akan muncul soal hipergeometrik pada kuis di hari Senin yang terdiri atas 5 pertanyaan ?

2. **Distribusi Binomial Negatif**
(Sumber : *BIOSTATISTIKA untuk Kedokteran dan Kesehatan Masyarakat*; Dr. Eko Budiarto, SKM; Penerbit Buku Kedokteran EGC; hal. 131)

   Pada suatu daerah gondok endemis, probabilitas seseorang terkena struma adalah 12%.Bila dilakukan pemeriksaan terhadap 48 orang penduduk yang diambil secara acak, berapa probabilitas orang ke-5 yang diperiksa merupakan orang ke-3 yang menderita struma ?

3. **Distribusi Geometrik**
(Sumber : ***http://www.schoolworkout.co.uk/***)
Each time a player plays a certain card game called "patience", there is a probability of 0.15 that the game will work out successfully and there is a probability of 0.85 that the game will not work out successfully. The probability of success in any game is independent of the outcome of any other game. A player plays games of patience until a game works out successfully.
   a. Find the probability that she plays 4 games altogether.
   b. Find the probability that at most 6 games are played.
   c. Write down the expected number of games that are played.

4. **Aproksimasi Poisson untuk Distribusi Binomial**
(Sumber : *SCHAUM'S OUTLINES STATISTIK EDISI KETIGA*; Murray R. Spiegel, Larry J. Stephens; hal. 147)
Menurut data dari National Office of Vital Statistics of the U.S. Department of Health, Education, and Welfare, rata – rata dari banyaknya kecelakaan orang tenggelam per tahun di Amerika Serikat adalah 3 per 100.000 penduduk.Carilah probabilitas bahwa di sebuah kota yang memiliki jumlah penduduk sebanyak 200.000 jiwa :
   a. Tidak ada orang yang tenggelam per tahunnya
   b. Dua orang tenggelam per tahunnya
   c. Enam orang tenggelam per tahunnya
   d. Delapan orang tenggelam per tahunnya
   e. Antara 4 dan 8 orang tenggelam per tahunnya
   f. Kurang dari 3 orang tenggelam per tahunnya

5. **Distribusi Poisson**

(Sumber : *PROBABILITY AND STATISTICS FOR ENGINEERING AND THE SCIENCES seventh edition;* Jay L. Devore; hal. 125)

The number of people arriving for treatment at an emergency room can be modeled by a Poisson process with a rate parameter of five per hour.

a. What is the probability that exactly four arrivals occur during a particular hour ?
b. What is the probability that at least four people arrive during a particular hour ?
c. How many people do you expect to arrive during 45 minutes period ?

PEMBAHASAN SOAL !

1. Dik :

N_1 = 4 pertanyaan tentang distribusi hipergeometrik
N_2 = 11 pertanyaan bukan tentang distribusi hipergeometrik
$N = N_1 + N_2 = 15$
n = 5 (sampel)
X menyatakan banyaknya pertanyaan tentang distribusi hipergeometrik yang muncul pada kuis hari Senin

Maka :

$$P(X = x) = \frac{C_x^{N_1}\, C_{n-x}^{N_2}}{C_n^N}$$

$$P(X \geq 1) = \sum_{x=1}^{4} \frac{C_x^{N_1}\, C_{n-x}^{N_2}}{C_n^N} = \sum_{x=1}^{4} \frac{C_x^4\, C_{5-x}^{11}}{C_5^{15}}$$

$$\sum_{x=1}^{4} \frac{C_x^4\, C_{5-x}^{11}}{C_5^{15}} = \frac{C_1^4\, C_4^{11} + C_2^4\, C_3^{11} + C_3^4\, C_2^{11} + C_4^4\, C_1^{11}}{3003} = \mathbf{\frac{11}{13}}$$

Jadi, peluang sekurang – kurangnya 1 dari kumpulan pertanyaan akan muncul soal hipergeometrik pada kuis di hari Senin yang terdiri atas 5 pertanyaan adalah $\mathbf{\frac{11}{13}}$ atau **sekitar 84,61%**.

2. Dik :

p = 12% = 0,12 (peluang menderita struma)

q = 88% = 0,88 (peluang tidak menderita struma)

k = 3

X menyatakan banyaknya penduduk yang diperiksa yang diperkirakan menderita struma

$$P(X = k) = C_{k-1}^{x-1} p^k q^{x-k}$$

$$P(X = 5) = C_2^4 p^3 q^2 = 6(0{,}12)^3(0{,}88)^2 \cong 8{,}03 \times 10^{-3} \cong 0{,}803\%$$

Jadi, probabilitas orang ke-5 yang diperiksa merupakan orang ke-3 yang menderita struma adalah **8,03 × 10**$^{\mathbf{-3}}$ atau **sekitar 0,803%**

3. We know :

p = 0,15 (probability of the game will work out successfully)

q = 0,85 (probability of the game will not work out successfully)

X is the number of games played

$$P(X = x) = pq^{x-1}, x = 1,2,3, \ldots$$

a. If she plays 4 games altogether she must lose the first 3 games and be successful on the 4th

$$P(X = 4) = (0{,}15)(0{,}85)^{4-1} = (0{,}15)(0{,}85)^3 \cong \mathbf{0{,}0921}$$

So, the probability that she plays 4 games altogether is **0,0921** or **9,21%**

b. At most 6 games played, it means that the maximum value of X is 6.

$$P(1 \leq X \leq 6) = \sum_{x=1}^{6} pq^{x-1} = 0{,}15(0{,}85^0 + 0{,}85^1 + 0{,}85^2 + 0{,}85^3 + 0{,}85^4 + 0{,}85^5)$$

$$P(1 \leq X \leq 6) = \sum_{x=1}^{6} pq^{x-1} = 0{,}15(4{,}152336563) \cong 0{,}623$$

So, the probability that at most 6 games are played is **0,623** or **62,3%**

c. The expected number (expected value) of the games there are played.

$$E(x) = \sum_{x=1}^{\sim} x(pq^{x-1}) = p + 2pq + 3pq^2 + \cdots$$

$$q\,E(x) = pq + 2pq^2 + 3pq^3 + \cdots$$

$$E(x) - q\,E(x) = (1 - q)E(x) = p + pq + pq^2 + pq^3 + \cdots = 1$$

$E(x) = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$ □ E(x) of the games that are played is $\frac{1}{0{,}15} \cong \mathbf{6{,}7}$

4. Dik :

$p = \frac{3}{100000} = 3 \times 10^{-5}$ (peluang seseorang tenggelam)

n = 200000

secara empiris, n ≥ 30 dan p ≤ 0,03, maka akan sangat efektif jika menggunakan aproksimasi poisson untuk distribusi binomial.

$$\lambda = np = 200000 \times 3 \times 10^{-5} = 6$$

$$P(X = x) = \frac{e^{-6}\, 6^x}{x!}\, , x = 0,1,2 \ldots$$

X menyatakan banyaknya orang yang tenggelam per tahunnya

a. Tidak ada orang yang tengelam

$$P(X = 0) = \frac{e^{-6}\, 6^0}{0!} = e^{-6} \cong \mathbf{2,479 \times 10^{-3}}$$

b. Dua orang tenggelam per tahunnya

$$P(X = 2) = \frac{e^{-6}\, 6^2}{2!} = 18e^{-6} \cong \mathbf{0,0446}$$

c. Enam orang tenggelam per tahunnya

$$P(X = 6) = \frac{e^{-6}\, 6^6}{6!} = 64{,}8 \times e^{-6} \cong \mathbf{0,161}$$

d. Delapan orang tenggelam per tahunnya

$$P(X = 8) = \frac{e^{-6}\, 6^8}{8!} \cong 41{,}66 \times e^{-6} \cong \mathbf{0,103}$$

e. Antara 4 dan 8 orang tenggelam per tahunnya

$$P(4 \le X \le 8) = \sum_{x=4}^{8} \frac{e^{-6}\, 6^x}{x!} \cong \mathbf{0,696}$$

f. Kurang dari 3 orang tenggelam per tahunnya

$$P(X < 3) = \sum_{x=0}^{2} \frac{e^{-6}\, 6^x}{x!} \cong \mathbf{0,062}$$

5. We know :

E(x) = 5

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{x}}{x!}\ , x = 0,1,2\ \ldots$$

E(x) in poisson distribution is λ, so E(x) = λ = 5

$$P(X = x) = \frac{e^{-5}\,5^{x}}{x!}\ , x = 0,1,2\ \ldots$$

X is number of people arriving for treatment at an emergency room

a. Exactly four arrivals occur during a particular hour

$$P(X = 4) = \frac{e^{-5}\,5^{4}}{4!} \cong 26{,}042 \times e^{-5} \cong \mathbf{0,175}$$

b. At least four people arrive during a particular hour

$$P(X \geq 4) = 1 - \sum_{x=0}^{3} \frac{e^{-5}\,5^{x}}{x!} \cong 1 - 0{,}265 \cong \mathbf{0,735}$$

c. How many people do you expect to arrive during 45 minutes period

We know that the expected value of arrival during one hour is five people.So, number of people expect to arrive during 45 minutes is :

$$\frac{45}{60} \times 5 = \mathbf{3,75}$$

So, about 3 to 4 people that expected will arrive during 45 minutes

TERIMA KASIH