

# **IMPROPER INTEGRAL (Integral Tak Wajar)**

Tim Kalkulus 1  
Tahun Akademik 2010/2011

# INTEGRAL TAK WAJAR

Bentuk  $\int_a^b f(x) dx$  disebut **Integral Tak Wajar**, jika:

- Paling sedikit satu batas integrasinya tak berhingga:  $[a, +\infty)$ ,  $(-\infty, a]$ ,  $(-\infty, +\infty)$ ; atau,
- Integran  $f(x)$  mempunyai titik diskontinu tak hingga di suatu titik  $c$  pada  $[a, b]$ :  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty$

Contoh:

$$1. \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

$$2. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

# INTEGRAL TAK WAJAR

## BATAS INTEGRAL TAK TERHINGGA

### 1. Satu batas integral tak terhingga

Definisi: 
$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$$

- Jika **limitnya ada** dan bernilai terhingga, dikatakan bahwa **integral tak wajar konvergen** dan memiliki nilai yang terhingga tersebut.
- Jika **limitnya tidak ada** (tidak memiliki nilai) maka integral tak wajar tersebut disebut **divergen**.

# INTEGRAL TAK WAJAR

## BATAS INTEGRAL TAK TERHINGGA

### 2. Kedua batas integral tak terhingga

Definisi:

Apabila  $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$  dan  $\int_0^{\infty} f(x)dx$  konvergen, maka

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$  dikatakan konvergen dengan nilai

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{\infty} f(x)dx$$

Dalam hal lain  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$  dinamakan divergen.

## Contoh

Selesaikan integral berikut:

1.  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$

2.  $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$

# INTEGRAL TAK WAJAR

## INTEGRAN TAK TERHINGGA

1. Integran yang tak terhingga pada titik ujung suatu interval

Definisi:

Misalkan  $f(x)$  kontinu dan non negatif pada  $[a,b)$  tetapi

$\lim_{x \rightarrow b^-} |f(x)| = \infty$  maka

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x)dx$$

Jika limitnya ada dan terhingga, disebut konvergen. Tetapi jika sebaliknya, maka integral tak wajar disebut divergen.

# INTEGRAL TAK WAJAR INTEGRAN TAK TERHINGGA

Hal yang sama;

Definisi:

Misalkan  $f(x)$  **kontinu** dan **non negatif** pada  $(a,b]$  tetapi  $\lim_{x \rightarrow a^+} |f(x)| = \infty$  maka

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

Jika limitnya **ada** dan **terhingga**, disebut **konvergen**.  
Tetapi jika sebaliknya, maka integral tak wajar disebut **divergen**.

# INTEGRAL TAK WAJAR

## INTEGRAN TAK TERHINGGA

### 2. Integran yang tak terhingga pada sebuah titik-dalam

Definisi:

Jika  $f(x)$  kontinu pada  $[a,b]$ , kecuali di titik  $c \in (a,b)$ .

Misalkan  $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = \infty$ . Maka

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Asal saja kedua integral di ruas kanan **konvergen**.

Apabila tidak, integral  $\int_a^b f(x) dx$  disebut **divergen**.

## Contoh

Selidiki integral tak wajar berikut:

1.  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

2.  $\int_1^2 \frac{1}{(x-2)^2} dx$

3.  $\int_0^2 \frac{1}{(2x-1)^{2/3}} dx$

## Latihan

1. Apakah integral berikut konvergen atau divergen ?  
Jika konvergen tentukan nilainya.

a.  $\int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2} dx$

b.  $\int_2^{\infty} \frac{1}{x-1} dx$

2. Tentukan luas daerah yang terletak dibawah grafik  $y=e^x$ , diatas sumbu x dan sebelah kiri garis  $x=1$ .

3. Selesaikan: a.  $\int_1^2 \frac{1}{1-x} dx$

b.  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 9}$