



TEKNIK INTEGRASI INTEGRAL FUNGSI RASIONAL

Tim Dosen Kalkulus I
Tahun Akademik 2010/2011

FUNGSI RASIONAL

- ✓ Fungsi rasional diperoleh dari hasil bagi dua fungsi suku banyak (polinomial). Fungsi rasional diekspresikan sebagai berikut:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{dimana } P(x) \text{ dan } Q(x) \text{ adalah polinomial}$$

- ✓ Untuk menghitung integral fungsi rasional, perlu dilakukan dekomposisi pecahan-parsial dari fungsi rasional tersebut.

FUNGSI RASIONAL

Terdapat 2 macam fungsi rasional, yaitu:

1. Fungsi rasional **sejati**, dimana derajat pembilang kurang dari derajat penyebut.

Contoh:
$$f(x) = \frac{2x+2}{x^2-4x+8}$$

2. Fungsi rasional **tidak sejati**, dimana derajat pembilang lebih dari derajat penyebut. Fungsi rasional ini dapat disederhanakan sebagai penjumlahan dari fungsi suku banyak dan fungsi rasional sejati.

Contoh:
$$f(x) = \frac{x^5+2x^3-x+1}{x^3+5x} = (x^2-3) + \frac{14x+1}{x^3+5x}$$

METODE PECAHAN PARSIAL

Metode pecahan parsial adalah suatu teknik aljabar dimana $R(x)$ didekomposisi menjadi jumlahan suku-suku:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = p(x) + F_1(x) + F_2(x) + \dots + F_k(x),$$

dimana $p(x)$ suatu polinomial dan $F_i(x)$ pecahan parsial

berbentuk $\frac{A}{(ax + b)^n}$ (faktor linier) atau

$\frac{Bx + C}{(ax^2 + bx + c)^n}$ (faktor kuadratik)

A, B, C, a, b, c adalah konstanta - konstanta.

METODE PECAHAN PARSIAL

Ada 4 kasus dari pemfaktoran penyebut, yaitu:

1. Faktor linear dan berulang
2. Faktor linear dan tidak berulang
3. Faktor kuadratik dan berulang
4. Faktor kuadratik dan tidak berulang

METODE PECAHAN PARSIAL

Kasus 1

Penyebut terdiri dari faktor-faktor linear dan berulang

Jika $Q(x)$ adalah $(ax + b)^n$, dimana kelipatan n dari faktor $ax + b$, maka dekomposisinya

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax + b)^n}, \quad A_1, A_2, \dots, A_n \text{ konstanta}$$

METODE PECAHAN PARSIAL

Misal

$$\frac{1}{(x+a)^2(x+b)} = \frac{A}{(x+a)} + \frac{B}{(x+a)^2} + \frac{C}{(x+b)}$$

$$= \frac{A(x+a)(x+b) + B(x+b) + C(x+a)^2}{(x+a)^2(x+b)}$$

Contoh:

Selesaikan $\int \frac{1}{(x+2)^2(x-1)} dx$

METODE PECAHAN PARSIAL

Kasus 2

Penyebut terdiri dari faktor-faktor linear dan tidak berulang

Jika $Q(x)$ adalah faktor-faktor linier dengan kelipatan $n = 1$,

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdots (a_nx + b_n)$$

maka dekomposisi :

$$\frac{A_1}{(a_1x + b_1)} + \frac{A_2}{(a_2x + b_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(a_nx + b_n)}$$

METODE PECAHAN PARSIAL

Misal

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} = \frac{A(x+b) + B(x+a)}{(x+a)(x+b)}$$

Contoh:

Selesaikan $\int \frac{1}{4x^2 - 9} dx$

METODE PECAHAN PARSIAL

Kasus 3

Penyebut terdiri dari faktor-faktor kuadratik dan berulang

Jika $Q(x)$ adalah $(ax^2+bx+c)^n$ (kelipatan n dari faktor kuadratik ax^2+bx+c), dimana ax^2+bx+c tidak dapat difaktorkan atau $b^2-4ac < 0$, maka dekomposisi $R(x)$ yaitu:

$$\frac{B_1x + C_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{B_nx + C_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

$B_1, B_2, \dots, B_n, C_1, C_2, \dots, C_n$ konstanta-konstanta.

METODE PECAHAN PARSIAL

Misal

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x^2+a)^3} &= \frac{Ax+B}{(x^2+a)} + \frac{Cx+D}{(x^2+a)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+a)^3} \\ &= \frac{(Ax+B)(x^2+a)^2 + (Cx+D)(x^2+a) + (Ex+F)}{(x^2+a)^3}\end{aligned}$$

Contoh:

Selesaikan

$$\int \frac{6x^2 - 15x + 22}{(x+3)(x^2+2)^2} dx$$

METODE PECAHAN PARSIAL

Kasus 4

Penyebut terdiri dari faktor-faktor kuadratik dan tidak berulang

Jika faktor-faktor kuadratik mempunyai kelipatan $n=1$, maka dekomposisi $R(x)$ yaitu

$$\frac{B_1x + C_1}{a_1x^2 + b_1x + c_1} + \frac{B_2x + C_2}{a_2x^2 + b_2x + c_2} + \dots + \frac{B_nx + C_n}{a_nx^2 + b_nx + c_n}$$

$B_1, B_2, \dots, B_n, C_1, C_2, \dots, C_n$ konstanta-konstanta.

METODE PECAHAN PARSIAL

Misal

$$\frac{1}{(x^2+a)(x^2+b)} = \frac{Ax+B}{x^2+a} + \frac{Cx+D}{x^2+b}$$
$$= \frac{(Ax+B)(x^2+b) + (Cx+D)(x^2+a)}{(x^2+a)(x^2+b)}$$

Contoh:

Selesaikan $\int \frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x+1)(x^2+1)} dx$

Contoh

Hitung $\int \frac{x^3 - 1}{x^3 + x} dx$

Dekomposisi integran : $\frac{x^3 - 1}{x^3 + x} = 1 - \frac{1 + x}{x(x^2 + 1)}$

Suku ke - 2 adalah fungsi rasional yg dapat didekomposisi

pecahan - parsial : $\frac{1 + x}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$

Konstanta A, B dan C diperoleh dengan mengalikan kedua sisi dgn fungsi penyebut :

$$1 + x = A(x^2 + 1) + (Bx + C)x$$

$$1 + x = (A + B)x^2 + (C)x + A$$

Diperoleh $A = 1, B = -1, C = 1$. Jadi $\frac{1 + x}{x(x^2 + 1)} = \frac{1}{x} + \frac{-x + 1}{x^2 + 1}$.

Jadi fungsi rasional semula didekomposisi menjadi

$$\frac{x^3 - 1}{x^3 + x} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2 + 1}$$

$$\int \frac{x^3 - 1}{x^3 + x} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2 + 1} \right) dx$$

$$= x - \ln |x| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \tan^{-1} x + c$$

METODE PECAHAN PARSIAL

Jika $Q(x)$ kombinasi dari faktor linear dan kuadratik, gunakan dekomposisi yang sesuai untuk masing-masing faktor.

$$\int \frac{5x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^4 + x^2} dx$$

$$x^4 + x^2 = x^2(x^2 + 1)$$

$$\frac{5x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^4 + x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

METODE PECAHAN PARSIAL

Latihan

Selesaikan integral berikut

$$1. \int \frac{5}{(2x+1)(x-2)} dx$$

$$2. \int \frac{4x^2 - 3x - 4}{x^3 + x^2 - 2x} dx$$

$$3. \int \frac{x+1}{(x-3)^2} dx$$

$$4. \int \frac{5x+7}{x^2 + 4x + 4} dx$$

$$5. \int \frac{2x^3 + 5x^2 + 16}{5x^5 + 8x^3 + 16x} dx$$