

Fungsi, Persamaan, dan Pertidaksamaan Eksponen dan Logaritma

B A B

7



Sumber: <http://peacecorpsonline.org>

Gempa pemacu tsunami yang telah memporak-porandakan Nanggroe Aceh Darussalam merupakan gempa terdasyat ketiga di dunia dengan kekuatan $R = 9$ skala Richter. Kekuatan gempa ini dicatat dengan alat yang dinamakan seismograf dengan menggunakan rumus dasar $R = \log \frac{M}{M_0}$. Penerapan pada seismograf ini merupakan salah satu kegunaan logaritma. Pada bab ini, kalian juga akan mempelajari penerapan lainnya.

- A. Grafik Fungsi Eksponen dan Fungsi Logaritma
- B. Persamaan dan Pertidaksamaan Eksponen
- C. Persamaan dan Pertidaksamaan Logaritma

A. Grafik Fungsi Eksponen dan Fungsi Logaritma

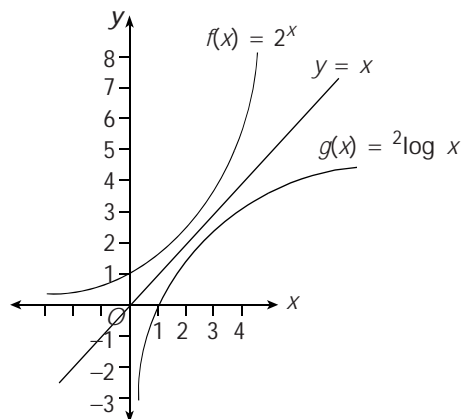
A. 1. Grafik Fungsi Eksponen dan Fungsi Logaritma dengan Bilangan Pokok $a > 1$

Di Kelas X, kalian telah mengetahui bahwa fungsi eksponen dan fungsi logaritma adalah dua fungsi yang saling invers. Untuk memahami sifat-sifat kedua fungsi tersebut, pada bab ini kalian akan menggambar grafik kedua fungsi itu. Sekarang, coba gambar grafik fungsi $f(x) = 2^x$ dan inversnya, yaitu $g(x) = {}^2\log x$ dalam satu sumbu koordinat.

Untuk memudahkan menggambar kedua grafik fungsi ini, terlebih dahulu buatlah tabel nilai-nilai x dan $f(x) = 2^x$ seperti berikut.

x	$-\infty$	\dots	-3	-2	-1	0	1	2	3	\dots	∞
$f(x) = 2^x$	0	\dots	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	\dots	∞

Setelah itu, gambarkan titik-titik tersebut pada koordinat Cartesius. Lalu hubungkan dengan kurva mulus, sehingga diperoleh grafik $f(x) = 2^x$. Grafik yang kalian dapatkan ini, cerminkan terhadap garis $y = x$ sehingga kalian mendapatkan grafik fungsi inversnya, yaitu $g(x) = {}^2\log x$.



Gambar 7.1

Grafik fungsi $f(x) = 2^x$ dan $g(x) = {}^2\log x$

Dengan memperhatikan grafik fungsi $f(x) = 2^x$ dan $g(x) = {}^2\log x$ yang masing-masing merupakan grafik fungsi eksponen dan fungsi logaritma dengan bilangan pokok 2, kalian dapat mengetahui bahwa:

No.	Fungsi $f(x) = 2^x$	Fungsi $g(x) = {}^2\log x$
1.	Daerah asalnya $\{x x \in \mathcal{R}\}$	Daerah asalnya $\{x x > 0, x \in \mathcal{R}\}$
2.	Daerah hasilnya $\{y y > 0, y \in \mathcal{R}\}$	Daerah hasilnya $\{y y \in \mathcal{R}\}$
3.	Sumbu- x asimtot datar	Sumbu y asimtot tegak
4.	Grafik di atas sumbu- x	Grafik di sebelah kanan sumbu- y
5.	Memotong sumbu- y di titik $(0, 1)$	Memotong sumbu- x di titik $(1, 0)$
6.	Merupakan fungsi naik untuk setiap x	Merupakan fungsi naik untuk setiap x

Sifat-sifat ini berlaku juga untuk setiap fungsi eksponen $f(x) = a^x$ dan fungsi logaritma $g(x) = {}^a\log x$ dengan $a > 1$.

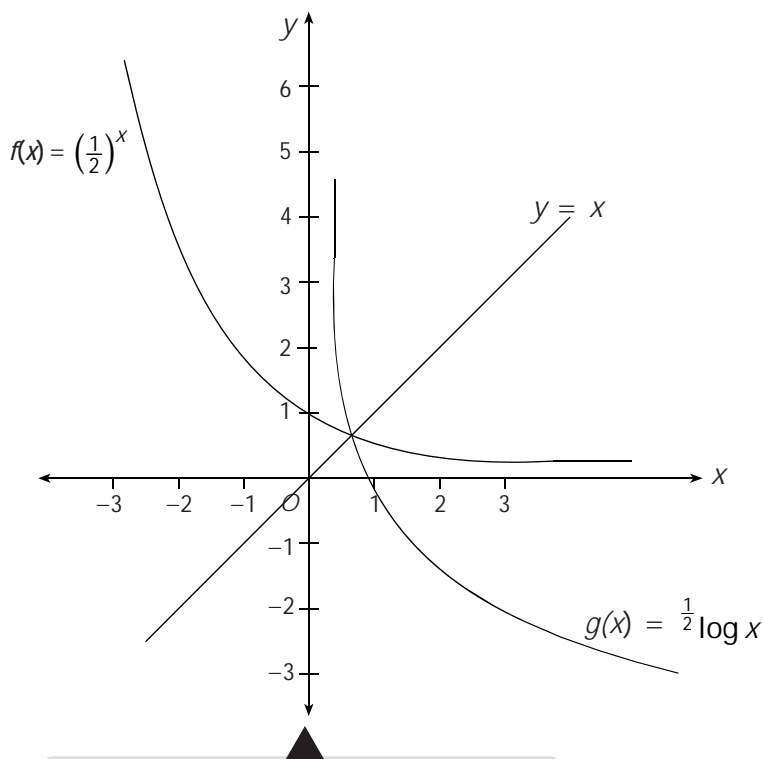
A. 2. Grafik Fungsi Eksponen dan Fungsi Logaritma dengan Bilangan Pokok $0 < a < 1$

Untuk menggambar grafik fungsi eksponen dan fungsi logaritma dengan bilangan pokok $0 < a < 1$, kalian dapat menggunakan prinsip yang sama seperti pada bilangan pokok $a > 1$, yaitu terlebih dahulu gambarkan grafik fungsi eksponennya. Kemudian, cerminkan terhadap garis $y = x$ untuk mendapatkan inversnya, yaitu fungsi logaritma.

Sekarang, coba gambar grafik fungsi $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ dan inversnya, yaitu $g(x) = \frac{1}{2}\log x$ dalam satu sumbu koordinat. Untuk memudahkan menggambar kedua grafik fungsi ini, terlebih dahulu buatlah tabel nilai-nilai x dan $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ seperti berikut.

x	$-\infty$...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	∞
$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	0	...	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$...	0

Setelah itu, gambarkan titik-titik tersebut pada koordinat Cartesius. Lalu, hubungkan dengan kurva mulus, sehingga diperoleh grafik $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Grafik yang kalian dapatkan ini, cerminkan terhadap garis $y = x$ sehingga kalian mendapatkan grafik fungsi inversnya, yaitu $g(x) = \frac{1}{2}\log x$.



Gambar 7.2

Grafik fungsi $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ dan $g(x) = \frac{1}{2}\log x$

Dengan memperhatikan grafik fungsi $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ dan $g(x) = \frac{1}{2} \log x$ yang masing-masing merupakan grafik fungsi eksponen dan fungsi logaritma dengan bilangan pokok $\frac{1}{2}$, kalian dapat mengetahui bahwa:

No.	Fungsi $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	Fungsi $g(x) = \frac{1}{2} \log x$
1.	Daerah asalnya $\{x x \in \mathcal{R}\}$	Daerah asalnya $\{x x > 0, x \in \mathcal{R}\}$
2.	Daerah hasilnya $\{y y > 0, y \in \mathcal{R}\}$	Daerah hasilnya $\{y y \in \mathcal{R}\}$
3.	Sumbu- x asimtot datar	Sumbu- y asimtot tegak
4.	Grafik di atas sumbu- x	Grafik di sebelah kanan sumbu- y
5.	Memotong sumbu- y di titik $(0, 1)$	Memotong sumbu- x di titik $(1, 0)$
6.	Merupakan fungsi turun untuk setiap x	Merupakan fungsi turun untuk setiap x

Sifat-sifat ini berlaku juga untuk setiap fungsi eksponen $f(x) = a^x$ dan fungsi logaritma $g(x) = {}^a \log x$ dengan $0 < a < 1$.

Asah Kompetensi 1

- Gambarlah grafik dari tiap fungsi berikut ini!
 - $f(x) = 2^x + 1$
 - $f(x) = 2 + 3^x$
 - $f(x) = 3^x + 1$
 - $f(x) = 3^x + 3$
- Gambarlah grafik dan invers dari tiap fungsi berikut!
 - $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
 - $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$
 - $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}$
 - $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}$



1

ASAH KEMAMPUAN

Waktu : 60 menit

- Gambarkan grafik fungsi-fungsi eksponen berikut ini!

Bobot soal: 40

- $f(x) = 2^{3x-2}$
- $g(x) = 2^{3x+2}$
- $k(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2}$
- $l(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2}$

e. $h(x) = 2^{3x-2}$ g. $m(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2}$

f. $j(x) = 2^{3x+2}$ h. $n(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+2}$

2. Gambarkan grafik fungsi-fungsi logaritma berikut ini.

Bobot soal: 40

a. $f(x) = {}^3\log(x-1)$ e. $k(x) = \frac{1}{3}\log(x-1)$

b. $g(x) = {}^3\log(x+1)$ f. $l(x) = \frac{1}{3}\log(x+1)$

c. $h(x) = {}^3\log x - 1$ g. $m(x) = \frac{1}{3}\log x - 1$

d. $j(x) = {}^3\log x + 1$ h. $k(x) = \frac{1}{3}\log x + 1$

3. Tentukanlah titik potong grafik fungsi $f(x) = -2^{x+1} + (\sqrt{2})^x + 3$ terhadap sumbu- x dan sumbu- y !

Bobot soal: 20

B. Persamaan dan Pertidaksamaan Eksponen

B. 1. Sifat-sifat Fungsi Eksponen

Untuk menentukan penyelesaian persamaan eksponen, sebaiknya kalian mengingat kembali sifat-sifat fungsi yang telah dipelajari di Kelas X.

Jika $a, b \in R, a \neq 0, m$ dan n bilangan rasional, maka sifat-sifat fungsi eksponen adalah sebagai berikut.

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
- $(a^m \cdot b^n)^p = a^{mp} \cdot b^{np}$
- $\left(\frac{a^m}{b^n}\right)^p = \frac{a^{m \cdot p}}{b^{n \cdot p}}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^p}} = \sqrt[mn]{a^p} = a^{\frac{p}{mn}}$
- $a^0 = 1$

Contoh

1. Sederhanakanlah!

a. $(3x^2 \cdot y^{-5})(-3x^{-8} \cdot y^9)$ b. $\frac{5x^5 \cdot y^2}{7x^3 \cdot y^{-5}}$

Jawab:

a. $(3x^2 \cdot y^{-5})(-3x^{-8} \cdot y^9) = (3x^2)(-3x^{-8})(y^{-5})(y^9)$
 $= (3)(-3)x^2 \cdot x^{-8} \cdot y^{-5} \cdot y^9$
 $= -9 \cdot x^{2-8} \cdot y^{-5+9}$
 $= -9x^{-6} \cdot y^4$
 $= -\frac{9y^4}{x^6}$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } \frac{5x^5 \cdot y^2}{7x^3 \cdot y^{-5}} &= \frac{5x^5}{7x^3} \cdot \frac{y^2}{y^{-5}} \\
 &= \frac{5}{7} x^{5-3} \cdot y^{2-(-5)} \\
 &= \frac{5}{7} x^2 \cdot y^{2+5} \\
 &= \frac{5}{7} x^2 y^7
 \end{aligned}$$

2. Sederhanakanlah!

a. $(\sqrt{x})^3$

b. $(8x^3 \cdot y^{12})^{\frac{1}{6}}$

Jawab:

a. $(\sqrt{x})^3 = (x^{\frac{1}{2}})^3$
 $= x^{\frac{3}{2}}$

b. $(8x^3 \cdot y^{12})^{\frac{1}{6}} = (2^3)^{\frac{1}{6}} \cdot (x^3)^{\frac{1}{6}} \cdot (y^{12})^{\frac{1}{6}}$
 $= 2^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot y^2$
 $= y^2 \sqrt{2x}$

3. Sederhanakanlah!

a. $\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y^5}}\right)^{10}$

b. $\sqrt[6]{\sqrt[4]{x^2}}$

Jawab:

a. $\left(\left(\frac{x}{y^5}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{10} = \left(\frac{x}{y^5}\right)^{\frac{1}{2} \cdot 10} = \left(\frac{x}{y^5}\right)^5 = \frac{x^5}{(y^5)^5} = \frac{x^5}{y^{25}}$

b. $\sqrt[6]{\sqrt[4]{x^2}} = \sqrt[6]{\sqrt[4]{x^2}} = \sqrt[24]{x^2} = x^{\frac{2}{24}} = x^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{x}$

Asah Kompetensi 2

1. Sederhanakanlah!

a. $2x^3 \cdot x^{-5}$

c. $\left(\frac{2}{3}m^2\right)^3$

e. $(a^5 \cdot b^3)^{\frac{1}{15}}$

b. $\frac{4a^5}{2a^{-3}}$

d. $(2m^{-4})^{\frac{1}{2}}$

f. $\left(\frac{3k^2}{5l^3}\right)^{\frac{1}{6}}$

2. Sederhanakanlah!

a. $(4x^3y^{-2})(3x^2y^{-10})$

c. $(\sqrt{4x})^5$

e. $\left(\sqrt{\frac{2x^2}{y^4}}\right)^5$

b. $\frac{x^7 10y^5}{9x^{-3}y^{-2}}$

d. $(-4x^2y^6)^{\frac{1}{3}}$

f. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2y^6}}$

Siapa Berani

1.
$$\frac{\left(1 + \left(\frac{x}{y}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \left(\frac{4}{x}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}}} = \dots$$

2.
$$\left(1 + \left(13 + \sqrt{13 + \sqrt[4]{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \dots$$

B. 2. Persamaan Eksponen

Persamaan eksponen adalah persamaan yang eksponen dan bilangan pokoknya memuat variabel. Simaklah contoh-contoh berikut ini.

- $4^{2x+1} = 32^{x-3}$ merupakan persamaan eksponen yang eksponennya memuat variabel x .
- $(y+5)^{5y-1} = (y+5)^{5-y}$ merupakan persamaan eksponen yang eksponen dan bilangan pokoknya memuat variabel y .
- $16^t + 2 \cdot 4^t + 1 = 0$ merupakan persamaan eksponen yang eksponennya memuat variabel t .

Ada beberapa bentuk persamaan eksponen ini, di antaranya:

a. $a^{f(x)} = a^m$

Jika $a^{f(x)} = a^m$, $a > 0$ dan $a \neq 1$, maka $f(x) = m$

Contoh

Tentukanlah penyelesaian $3 = 27^{1-x}$.

Jawab:

$$3 = 27^{1-x}$$

$$3^1 = 3^{3(1-x)}$$

$$3(1-x) = 1$$

$$1-x = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

Jadi, penyelesaian $3 = 27^{1-x}$ adalah $x = \frac{2}{3}$.

b. $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

Jika $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $a > 0$ dan $a \neq 1$, maka $f(x) = g(x)$

Contoh

Tentukanlah penyelesaian $25^{x+3} = 5^{x-1}$.

Jawab:

$$25^{(x+3)} = 5^{(x-1)}$$

$$5^{2(x+3)} = 5^{(x-1)}$$

$$2(x+3) = x-1$$

$$2x+6 = x-1$$

$$x = -7$$

Jadi, penyelesaian $25^{x+3} = 5^{x-1}$ adalah $x = -7$.

c. $a^{f(x)} = b^{f(x)}$, $a \neq b$

Jika $a^{f(x)} = b^{f(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, dan $a \neq b$, maka $f(x) = 0$

Contoh

Tentukanlah penyelesaian $45^{x-6} = 50^{x-6}$.

Jawab:

$$45^{x-6} = 50^{x-6}$$

Supaya ruas kiri dan kanan sama, $x-6 = 0$, sehingga $45^0 = 50^0$

$$x-6 = 0$$

$$x = 6$$

Jadi, penyelesaian $45^{x-6} = 50^{x-6}$ adalah $x = 6$.

d. $f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}$

Jika $f(x)g(x) = f(x)^{h(x)}$, maka penyelesaiannya adalah sebagai berikut.

- $g(x) = h(x)$
- $f(x) = 1$
- $f(x) = 0$, asalkan $g(x)$ dan $h(x)$ keduanya positif
- $f(x) = -1$, asalkan $g(x)$ dan $h(x)$ keduanya genap atau keduanya ganjil

Contoh

Tentukanlah himpunan penyelesaian $(3x - 10)^{x^2} = (3x - 10)^{2x}$.

Jawab:

- $x^2 = 2x$
 $x^2 - 2x = 0$
 $x(x - 2) = 0$
 $x = 0$ atau $x = 2$
- $3x - 10 = 0$
 $3x = 10$
 $x = \frac{10}{3}$
- $3x - 10 = 1$
 $3x = 11$
 $x = \frac{11}{3}$

Sekarang periksa apakah untuk $x = \frac{10}{3}$, $g(x)$ dan $h(x)$ keduanya positif?

$$g\left(\frac{10}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}\right)^3 = \frac{1000}{27} > 0$$

$$h\left(\frac{10}{3}\right) = 2 \cdot \frac{10}{3} = \frac{20}{3} > 0$$

Jadi, untuk $x = \frac{10}{3}$, $g(x)$ dan $h(x)$ keduanya positif, sehingga

$x = \frac{10}{3}$ merupakan penyelesaian.

- $3x - 10 = -1$
 $3x = 9$
 $x = 3$

Sekarang periksa apakah untuk $x = 3$, $g(x)$, dan $h(x)$ keduanya genap atau keduanya ganjil?

$$g(3) = 3^2 = 9 \text{ dan } h(3) = 2 \cdot 3 = 6$$

Perhatikan bahwa untuk $x = 3$, $g(x)$ ganjil dan $h(x)$ genap sehingga $x = 3$ bukan penyelesaian.

Dengan demikian, himpunan penyelesaian

$$(3x - 10)^{x^2} = (3x - 10)^{2x} \text{ adalah } \left\{0, 2, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}\right\}.$$

e. $A(a^{f(x)})^2 + B \cdot a^{f(x)} + C = 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $A, B, C \in R$, $A \neq 0$

Terlebih dahulu, misalkan $y = a^{f(x)}$. Dari pemisalan ini, diperoleh $Ay^2 + By + C = 0$. Nilai y yang kalian peroleh, substitusi kembali pada pemisalan $y = a^{f(x)}$ sehingga kalian memperoleh nilai x .

Contoh

Tentukan himpunan penyelesaian $16^t + 2 \cdot 4^t + 1 = 0$.

Jawab:

$$16^t + 2 \cdot 4^t + 1 = 0$$

$$4^{2t} + 2 \cdot 4^t + 1 = 0$$

Misalkan $y = 4^t$, sehingga diperoleh:

$$y^2 + 2y + 1 = 0$$

$$(y + 1)^2 = 0$$

$$y = -1$$

Substitusi nilai y yang kalian peroleh ke pemisalan $y = 4^t \Leftrightarrow 4^t = -1$.

Oleh karena untuk setiap $t \in R$, $4^t > 0$, maka tidak ada nilai t yang memenuhi $4^t = -1$.

Jadi, himpunan penyelesaian $16^t + 2 \cdot 4^t + 1 = 0$ adalah \emptyset .

Asah Kompetensi 3

1. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan-persamaan berikut!

a. $2^5 \times 8^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2x}$

b. $2^{x-y+1} = 16$

c. $3^{2x-y+3} = 9^x$

d. $3^{5x-1} = 27^{x+3}$

e. $\frac{4^{x+2}}{8} = \sqrt{8^x}$

f. $12^{x^2-x+2} = 24^{x^2-x+2}$

g. $6^{x-2} + 6^{x-1} = 5$

h. $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

2. x_1 dan x_2 memenuhi persamaan $(\log(x-1) \cdot \log(x+1)) \cdot \frac{1}{x \log 10} = \log 10$

Tentukanlah $x_1 \cdot x_2$

3. x_1 dan x_2 memenuhi persamaan $\frac{{}^{100}\log \frac{x^5}{100}}{{}^{100}\log x} \cdot {}^{100}\log x = \frac{5}{{}^{100}\log x}$

Tentukanlah $\sqrt[5]{x_1 x_2}$.

Tentukan nilai x yang memenuhi $(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x - (\sqrt{3-2\sqrt{2}})^x = \frac{3}{2}$.

B. 3. Pertidaksamaan Eksponen

Sebelumnya, kalian telah mengetahui sifat-sifat fungsi eksponen, yaitu sebagai berikut.

- Untuk $a > 1$, fungsi $f(x) = a^x$ merupakan fungsi naik. Artinya, untuk setiap $x_1, x_2 \in R$ berlaku $x_1 < x_2$ jika dan hanya jika $f(x_1) < f(x_2)$.
- Untuk $0 < a < 1$, fungsi $f(x) = a^x$ merupakan fungsi turun. Artinya, untuk setiap $x_1, x_2 \in R$ berlaku $x_1 < x_2$ jika dan hanya jika $f(x_1) > f(x_2)$.

Catatan
Himpunan penyelesaian dapat disingkat dengan HP.

Sifat-sifat ini berguna untuk menyelesaikan pertidaksamaan eksponen.

Contoh

Tentukan himpunan penyelesaian $2^{x+2} > 16^{x-2}$.

Jawab:

$$2^{x+2} > 16^{x-2}$$

$$2^{x+2} > 2^{4(x-2)}$$

$$x + 2 > 4(x - 2) \dots\dots\dots a > 1, \text{ maka fungsi naik}$$

$$x + 2 > 4x - 8$$

$$3x < 10$$

$$x < \frac{10}{3}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $HP = \left\{ x \mid x < \frac{10}{3}, x \in R \right\}$.

Asah Kompetensi 3

Tentukanlah himpunan penyelesaian pertidaksamaan-pertidaksamaan berikut!

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \sqrt{2^{2x+1}} \leq \frac{2^5}{4}$

4. $3^{2x-4} < 3^{2x-3}$

2. $3^{x+5} > 3^{x^2+6x+11}$

5. $(x^2 - 2x + 3)^{2x-1} \geq (x^2 - 2x + 3)^{x+3}$

3. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x+1} < \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$

6. $6^{2x+1} + 8 \cdot 6^x + 2 > 0$



ASAH KEMAMPUAN

Waktu : 60 menit

1. Tentukanlah himpunan penyelesaian persamaan-persamaan berikut.

Bobot soal: 20

a. $\sqrt{\left(\frac{1}{64}\right)^{3x-1}} = 32$

c. $2^{2x} + 2^{x+2} - 32 = 0$

b. $(3x+1)^{2x-8} = (5x-3)^{3x^2-8}$

d. $3^{2x} - 5 \cdot 3^{4x+1} + 6 = 0$

2. Tentukanlah himpunan penyelesaian pertidaksamaan-pertidaksamaan berikut!

Bobot soal: 20

a. $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2-2x}} \geq 8$

c. $3x + \frac{3}{3^x} - 4 > 0$

b. $(x+2)^{2x+6} < (x^2+4x+4)^{3x+5}$

d. $2^{2x} - 2^{x+2} + 3 = 0$

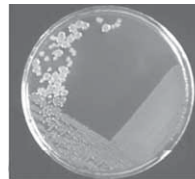
3. Sebuah koloni lebah meningkat 25% setiap tiga bulan. Pak Tahomadu ingin memelihara lebah-lebah ini. Ia menargetkan lebah-lebah tersebut mencapai 18.000 dalam 18 bulan mendatang. Berapa banyak lebah yang harus dipeliharanya sekarang?



Sumber: www.soccer.net

Bobot soal: 20

4. Jika populasi suatu koloni bakteri berlipat dua setiap 30 menit, berapa lama waktu yang diperlukan oleh koloni itu agar populasinya menjadi berlipat tiga?



Sumber: Microsoft Encarta Reference Library, 2005

Bobot soal: 20

5. Segelas kopi kira-kira mengandung 100 mg kafein. Jika kalian meminum segelas kopi, kafein akan diserap ke dalam darah dan akhirnya dimetabolisme oleh tubuh. Setiap 5 jam, banyak kafein di dalam darah berkurang 50%.



Sumber: Microsoft Encarta Reference Library, 2005

Bobot soal: 20

- a. Tulislah sebuah persamaan yang menyatakan banyak kafein di dalam darah sebagai suatu fungsi eksponen dari waktu t sejak kalian minum kopi!
- b. Setelah berapa jam kafein di dalam darah tinggal 1 mg?

C. Persamaan dan Pertidaksamaan Logaritma

C. 1. Sifat-Sifat Fungsi Logaritma

Di Kelas X telah dipelajari sifat-sifat logaritma. Secara umum bentuk logaritma dituliskan

$$a^b = c \Leftrightarrow {}^a\log c = b$$

dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$

Sifat-sifat logaritma:

- ${}^a\log 1 = 0$
- ${}^a\log a = 1$
- ${}^a\log \frac{1}{a} = -1$
- ${}^a\log a^b = b$
- ${}^a\log b + {}^a\log c = {}^a\log bc$
- ${}^a\log b - {}^a\log c = {}^a\log \frac{b}{c}$
- $a^{{}^a\log b} = b$
- ${}^a\log b = \frac{{}^c\log b}{{}^c\log a}$
- ${}^a\log b = \frac{1}{{}^b\log a}$
- ${}^{a^c}\log b^d = {}^a\log b^{\frac{d}{c}} = \frac{d}{c} \cdot {}^a\log b$

Contoh

Hitunglah!

- ${}^4\log 1$
- $\frac{1}{3}\log \frac{1}{3}$
- $\frac{1}{2}\log 8$
- ${}^5\log \frac{1}{5}$
- ${}^{16}\log 4$
- ${}^8\log 32$
- $\frac{1}{{}^3\log 6} + \frac{1}{{}^2\log 6}$
- ${}^3\log 18 - {}^3\log 2$

Jawab:

- ${}^4\log 1 = 0$
- $\frac{1}{3}\log \frac{1}{3} = 1$
- $\frac{1}{2}\log 8 = \frac{1}{2}\log \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -3$
- ${}^5\log \frac{1}{5} = -1$
- ${}^{16}\log 4 = \frac{{}^2\log 4}{{}^2\log 16} = \frac{{}^2\log (2)^2}{{}^2\log (2)^4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$f. \quad {}^8\log 32 = {}^{2^3}\log 2^5$$

$$= \frac{5}{3} \cdot {}^2\log 2 = \frac{5}{3}$$

$$g. \quad \frac{1}{{}^3\log 6} + \frac{1}{{}^2\log 6} = {}^6\log 3 + {}^6\log 2$$

$$= {}^6\log 3 \cdot 2$$

$$= {}^6\log 6 = 1$$

$$h. \quad {}^3\log 18 - {}^3\log 2 = {}^3\log \frac{18}{2}$$

$$= {}^3\log 9$$

$$= {}^3\log(3)^2 = 2$$

C. 2. Persamaan Logaritma

Persamaan logaritma adalah persamaan yang variabelnya sebagai numerus atau sebagai bilangan pokok dari suatu logaritma. Perhatikan contoh berikut ini.

- $\log x + \log (2x + 1) = 1$ merupakan persamaan logaritma yang numerusnya memuat variabel x
- ${}^5\log 4m + {}^5\log m^2 = 0$ merupakan persamaan logaritma yang numerusnya memuat variabel m
- ${}^x\log 5 + {}^x\log 2 = 2$ merupakan persamaan logaritma yang bilangannya memuat variabel x
- ${}^{2t}\log (t - 2) - {}^{2t}\log 2t = -2$ merupakan persamaan logaritma yang bilangannya dan bilangannya pokoknya memuat variabel t

Ada beberapa bentuk persamaan logaritma ini, di antaranya:

$$a. \quad {}^a\log f(x) = {}^a\log m$$

Jika ${}^a\log f(x) = {}^a\log m$, $f(x) > 0$, maka $f(x) = m$.

Contoh

Tentukanlah penyelesaian ${}^2\log (x - 2) = 4$.

Jawab:

$${}^2\log (x - 2) = 4$$

$${}^2\log (x - 2) = {}^2\log 2^4$$

$$x - 2 = 2^4$$

$$x = 18$$

Jadi, penyelesaian ${}^2\log (x - 2) = 4$ adalah $x = 18$.

b. ${}^a\log f(x) = {}^b\log f(x)$

Jika ${}^a\log f(x) = {}^b\log f(x)$, $a \neq b$, maka $f(x) = 1$.

Contoh

Tentukanlah penyelesaian $\log (x^2 - 3) = {}^4\log (x^2 - 3)$.

Jawab:

$$\log (x^2 - 3) = {}^4\log (x^2 - 3)$$

$$x^2 - 3 = 1$$

$$x^2 = 4$$

$$x = -2 \text{ atau } x = 2$$

Jadi, penyelesaian $\log (x^2 - 3) = {}^4\log (x^2 - 3)$ adalah $x = -2$ atau $x = 2$.

c. ${}^a\log f(x) = {}^a\log g(x)$

Jika ${}^a\log f(x) = {}^a\log g(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$, dan $g(x) > 0$, maka $f(x) = g(x)$.

Contoh

Tentukanlah penyelesaian ${}^7\log (x^2 - 2x + 3) = {}^7\log (4x - 2)$.

Jawab:

$${}^7\log (x^2 - 2x + 3) = {}^7\log (4x - 2)$$

$$x^2 - 2x + 3 = 4x - 2$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$(x - 1)(x - 5) = 0$$

$$x = 1 \text{ atau } x = 5$$

Sekarang, selidiki apakah $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$?

- $f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 1 - 2 + 3 = 2 > 0$
 $g(1) = 4 \cdot 1 - 2 = 4 - 2 = 2 > 0$
- $f(5) = 5^2 - 2 \cdot 5 + 3 = 25 - 10 + 3 = 18 > 0$
 $g(5) = 4 \cdot 5 - 2 = 20 - 2 = 18 > 0$

Karena untuk $x = 1$ dan $x = 5$, $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$, maka $x = 1$ dan $x = 5$ merupakan penyelesaian.

Jadi, penyelesaian ${}^7\log (x^2 - 2x + 3) = {}^7\log (4x - 2)$ adalah $x = 1$ dan $x = 5$.

d. ${}^{f(x)}\log g(x) = {}^{f(x)}\log h(x)$

Jika ${}^{f(x)}\log g(x) = {}^{f(x)}\log h(x)$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $h(x) > 0$, dan $f(x) \neq 1$, maka $g(x) = h(x)$.

Contoh

Tentukanlah himpunan penyelesaian dari
 $x^{-1} \log (x+2) = x^{-1} \log (x^2 + 3x + 2)$

Jawab:

$$x^{-1} \log (x+2) = x^{-1} \log (x^2 + 3x + 2)$$

$$x+2 = x^2 + 3x + 2$$

$$x^2 + 2x = 0$$

$$x(x+2) = 0$$

$$x = 0 \text{ atau } x = -2$$

Sekarang, selidiki apakah $f(x) > 0$, $f(x) \neq 1$, $g(x) > 0$, dan $h(x) > 0$

$$f(0) = 0 - 1 = -1 < 0$$

$$f(-2) = -2 - 1 = -3 < 0$$

Oleh karena untuk $x = 0$ dan $x = -2$, $f(x) < 0$, maka $x = 0$ atau $x = -2$ bukan penyelesaian.

Jadi, himpunan penyelesaian dari

$$x^{-1} \log (x+2) = x^{-1} \log (x^2 + 3x + 2) \text{ adalah } \emptyset.$$

e. $A^p \log^2 f(x) + B^p \log f(x) + C = 0$

Terlebih dahulu, misalkan $y = {}^p \log f(x)$. Dari pemisalan ini, diperoleh $Ay^2 + By + C = 0$. Nilai y yang kalian peroleh, substitusi kembali pada pemisalan $y = {}^p \log f(x)$, sehingga kalian memperoleh nilai x .

Contoh

Tentukan penyelesaian ${}^4 \log^2 x - {}^4 \log x^3 + 2 = 0$.

Jawab:

$${}^4 \log^2 x - {}^4 \log x^3 + 2 = 0.$$

$${}^4 \log^2 x - 3 {}^4 \log x + 2 = 0.$$

Misalkan $y = {}^4 \log x$, maka

$$y^2 - 3y + 2 = 0$$

$$(y-1)(y-2) = 0$$

$$y = 1 \text{ atau } y = 2$$

Untuk mendapatkan nilai x , substitusilah nilai y yang kalian peroleh ke pemisalan $y = {}^4 \log x$

$$y = 1 \Rightarrow {}^4 \log x = 1, \text{ sehingga } x = 4.$$

$$y = 2 \Rightarrow {}^4 \log x = 2, \text{ sehingga } x = 16.$$

Jadi, penyelesaian ${}^4 \log^2 x - {}^4 \log x^3 + 2 = 0$ adalah $x = 4$ atau $x = 16$.

Asah Kompetensi 5

1. Tentukan penyelesaian persamaan-persamaan logaritma berikut.

a. ${}^3\log (x^2 - 5x + 7) = 0$

d. $2 \log^2 x - 9 \log x = -4$

b. ${}^3\log (x^2 - 3x + 2) = {}^3\log (2x - 4)$

e. $\frac{{}^3\log (2x - 3)}{{}^3\log x} + \frac{{}^x\log (x + 6)}{{}^{x+2}\log x} = 1$

c. ${}^x\log (3x + 4) = {}^x\log (x^2 - 2x + 10)$

2. Hitunglah!

a. ${}^2\log 10 {}^5\log 10 - ({}^2\log 5 + {}^5\log 2)$

b. $\log 30 - \frac{1}{{}^{48}\log 10} + \frac{1}{{}^{16}\log 10}$

Olimpiade Matematika SMU, 2000

c. $\frac{({}^5\log x)^2 - ({}^5\log y)^2}{{}^5\log x - {}^5\log y}$

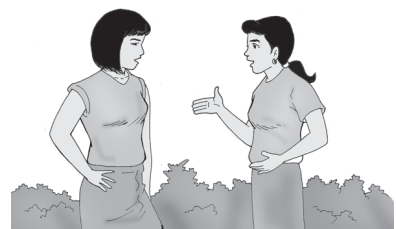
d. $\frac{\log x\sqrt{y} + \log y\sqrt{x} - \log xy}{\log xy}$

e. ${}^2\log \sin x + {}^2\log \cos x - {}^2\log \sin 2x$, untuk $\sin x > 0$ dan $\cos x > 0$



GaMeMath

Nini Sentera dan Uci bermain tebak-tebakan. Nini Sentera merahasiakan dua bilangan. Bilangan pertama terdiri atas 14 angka sedangkan bilangan kedua terdiri atas 18 angka. Ia meminta Uci memperkirakan banyak angka di depan koma jika bilangan pertama dibagi bilangan kedua.



C. 3. Pertidaksamaan Logaritma

Pada pembahasan sebelumnya, kalian telah mengetahui sifat-sifat fungsi logaritma, yaitu sebagai berikut.

- Untuk $a > 1$, fungsi $f(x) = {}^a\log x$ merupakan fungsi naik. Artinya, untuk setiap $x_1, x_2 \in R$ berlaku $x_1 < x_2$ jika dan hanya jika $f(x_1) < f(x_2)$.
- Untuk $0 < a < 1$, fungsi $f(x) = {}^a\log x$ merupakan fungsi turun. Artinya, untuk setiap $x_1, x_2 \in R$ berlaku $x_1 < x_2$ jika dan hanya jika $f(x_1) > f(x_2)$.

Sifat-sifat ini berguna untuk menyelesaikan pertidaksamaan logaritma.

Contoh

Tentukan himpunan penyelesaian ${}^3\log (x + 5) > 0$.

Jawab:

$${}^3\log (x + 5) > 0$$

$${}^3\log (x + 5) > {}^3\log 1$$

$$x + 5 > 1 \quad \dots\dots\dots \text{karena } a > 1, \text{ maka fungsi naik}$$

$$x > -4$$

Perhatikan pula bahwa numerusnya harus lebih dari nol. Berarti, $x + 5 > 0$. Didapat $x > -5$.

Jadi, himpunan penyelesaian ${}^3\log (x + 5) > 0$ adalah

$$\text{HP} = \{x \mid x > -5 \text{ atau } x > -4, x \in \mathbb{R}\}$$

Asah Kompetensi 6

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan-pertidaksamaan logaritma berikut.

1. ${}^3\log x > 2$

6. $\frac{1}{2} \log (3x + 1) < \frac{1}{2} \log (x + 7)$

2. ${}^3\log (x - 2) \geq 4$

7. $\frac{1}{3} \log (x + 3) \geq 2$

3. ${}^2\log (x^2 - 2x) > 3$

8. $\frac{1}{2} \log (x^2 - 3) < 0$

4. ${}^9\log (x^2 - x + 3) \leq 1$

9. $\frac{1}{2} \log (3x^2 - 4x + 1) > 0$

5. $\log (x^2 + 2x + 1) \leq \log (3x + 4)$

10. $2^3 \log^2 x - 5 {}^3\log x + 2 \leq 0$



ASA H KEMAMPUAN

Waktu : 60 menit

1. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan-persamaan logaritma berikut!

Bobot soal: 70

a. $\log x - \log 3 = \log (x - 3)$

b. $\log \log (x + 2) = 2 + \log 3$

c. ${}^{0.5}\log (x + 2) + {}^4\log (x + 2) = 0$

d. $\log x = \log (\log x + 4) - 4$

e. $25^5 \log \sqrt{x+1} = 4$

f. ${}^2\log ({}^3\log (2x - 1)) = 2$

g. $\sqrt{{}^2\log \sqrt{x+6}} = 2$

2. Diketahui $\log(x - y) = \log 3 \cdot {}^9\log 4$ dan $2^{x-1} = 4^{y+x}$. Tentukanlah nilai x dan y .

Bobot soal: 10

3. Diketahui $xy = 80$ dan $\log x - 2 \log y = 1$. Tentukanlah nilai $x - 4y$

Bobot soal: 10

Olimpiade Matematika SMU, 2000

4. Banyak desibel suatu suara yang berintensitas I didefinisikan sebagai

Bobot soal: 10

$B = 10 \log \frac{I}{I_0}$. Jika dua suara yang berintensitas I_1 dan I_2 mempunyai

desibel B_1 dan B_2 , tunjukkan bahwa $B_1 - B_2 = 10 \log \frac{I_1}{I_2}$.

Olimpiade Matematika SMU, 2000

Siapa Berani

x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan $3 \log(9x + 18) = 2 + x$. Tentukanlah nilai $x_1 + x_2$.

Olimpiade Matematika SMU, 2000

Rangkuman

1. Fungsi eksponen dan fungsi logaritma adalah dua fungsi yang saling invers.

$$f(x) = a^x \Rightarrow g(x) = {}^a\log x$$

dengan $f(x)$: fungsi eksponen

$g(x)$: fungsi logaritma

2. Bentuk-bentuk persamaan eksponen.

- Jika $a^{f(x)} = a^m$, $a > 0$ dan $a \neq 1$, maka $f(x) = m$
- Jika $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $a > 0$ dan $a \neq 1$, maka $f(x) = g(x)$
- Jika $a^{f(x)} = b^{f(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, dan $a \neq b$, maka $f(x) = 0$
- Jika $f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}$, maka $g(x) = h(x)$

3. Sifat-sifat fungsi eksponen

- | | |
|-------------------------------|--|
| • $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ | • $(a^m \cdot b^n)^p = a^{m \cdot p} \cdot b^{n \cdot p}$ |
| • $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ | • $\left(\frac{a^m}{b^n}\right)^p = \frac{a^{m \cdot p}}{b^{n \cdot p}}$ |
| • $(a^m)^n = a^{mn}$ | • $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^p}} = \sqrt[mn]{a^p} = a^{\frac{p}{mn}}$ |
| • $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ | • $a^0 = 1$ |

4. Bentuk-bentuk persamaan logaritma

- Jika ${}^a\log f(x) = {}^a\log m$, $f(x) > 0$, maka $f(x) = m$
- Jika ${}^a\log f(x) = {}^b\log f(x)$, $a \neq b$, maka $f(x) = 1$
- Jika ${}^a\log f(x) = {}^a\log g(x)$, $g(x) > 0$, dan $f(x) > 0$, maka $f(x) = g(x)$
- Jika ${}^{f(x)}\log g(x) = {}^{f(x)}\log h(x)$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $h(x) > 0$, dan $f(x) \neq 1$

5. Sifat-sifat fungsi logaritma

- ${}^a\log 1 = 0$
- ${}^a\log a = 1$
- ${}^a\log \frac{1}{a} = -1$
- ${}^a\log a^b = b$
- ${}^a\log b + {}^a\log c = {}^a\log bc$
- ${}^a\log b - {}^a\log c = {}^a\log \frac{b}{c}$
- $a^{{}^a\log b} = b$
- ${}^a\log b = \frac{{}^c\log b}{{}^c\log a}$
- ${}^a\log b = \frac{1}{{}^b\log a}$
- $a^c \log b^d = {}^a\log b^{\frac{d}{c}} = \frac{d}{c} \cdot {}^a\log b$

Ulangan Bab 7

1. Pilihlah jawaban yang paling tepat!

1. Jika $a = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$ dan $b = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$, maka

$$a + b = \dots$$

- A. $4\sqrt{3}$ D. -4
 B. 4 E. -6
 C. 1

2. Nilai x yang memenuhi $2^{n+3} = {}^{n+4}\sqrt{64}$ adalah

- A. 6 dan 1 D. -1 dan -6
 B. 1 E. -2 dan -8
 C. -6

3. Jika ${}^3\log 5 = p$ dan ${}^3\log 11 = q$, maka ${}^{15}\log 275 = \dots$

- A. $\frac{2p+q}{p+1}$ D. $(2p + q)(p + 1)$
 B. $\frac{p+2q}{p+1}$ E. $\frac{p+q}{2q}$
 C. $\frac{2q+1}{p}$

4. Nilai dari $\frac{\log(a^2 - x^2)}{\log a} - {}^a\log\left[1 - \frac{x^2}{a^2}\right]$

adalah

- A. -2 D. 3
 B. -1 E. 2
 C. 1

5. Nilai x yang memenuhi

$$\left({}^4\log x\right)^2 - {}^2\log\sqrt{x} - \frac{3}{4} = 0$$

adalah

- A. 16 atau 4 D. 8 atau $\frac{1}{2}$
 B. 16 atau $\frac{1}{4}$ E. 8 atau 4
 C. 8 atau 2

6. Jika x_1 dan x_2 memenuhi

$$2\left({}^4\log x\right)^2 - 6\left({}^4\log \frac{x}{2}\right) + 1 = 0,$$

maka $x_1 + x_2 = \dots$

- A. 20 D. 4
 B. 12 E. 2
 C. 6

7. Nilai x yang memenuhi

$$4^{2x^2 + 3x - 5} < \frac{1}{64}$$
 adalah

- A. $\frac{1}{2} < x < 2$ D. $2 < x < \frac{1}{2}$
 B. $-\frac{1}{2} < x < 2$ E. $-4 < x < -2$
 C. $-2 < x < -\frac{1}{2}$

8. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan

$${}^2\log\left(x + \frac{12}{x}\right) \geq 3$$
 adalah

- A. $\{x | x \leq 2 \text{ atau } x \geq 6, x \in R\}$
 B. $\{x | 0 < x \leq 2 \text{ atau } x \geq 6, x \in R\}$
 C. $\{x | x < 0 \text{ atau } 2 \leq x \leq 6, x \in R\}$
 D. $\{x | x < 0 \text{ atau } x \geq 1\}$
 E. $\{x | x < 0 \text{ atau } x \geq 2\}$

9. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan

$$\frac{|x| - 2}{x} \leq 3$$
 adalah

- A. $\{x | x \geq 1, x \in R\}$
 B. $\{x | x \leq \frac{1}{2} \text{ atau } x \geq 1, x \in R\}$
 C. $\{x | 0 < x \leq 1, x \in R\}$
 D. $\{x | x > 0 \text{ atau } -\frac{1}{2} < x < 0, x \in R\}$
 E. $\{x | x < 1 \text{ atau } x \geq 2\}$

10. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan $\log 4 + \log (x+3) \leq \log x^2$ adalah

- A. $\{x|x \geq 6, x \in R\}$
- B. $\{x|-3 < x \leq -2 \text{ atau } x \geq 6\}$
- C. $\{x|-3 < x \leq -2 \text{ atau } 0 \leq x \leq 6\}$
- D. $\{x|x \leq -2 \text{ atau } x \geq 6\}$
- E. $\{x|x \leq -4 \text{ atau } x \geq 4\}$

11. Jika

$$3^{5x-1} - 27^{x+3} = 0$$

Nilai x yang memenuhi adalah

- A. 2
- B. 3
- C. 5
- D. 6
- E. 7

12. Bentuk $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}} b^{-3}}{a^{-1} b^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{2}{3}}$ dapat disederhanakan menjadi

- A. $\frac{b}{a}$
- B. $\frac{a}{b}$
- C. $b\sqrt{a}$
- D. ab
- E. $\sqrt[3]{b}$

13. Nilai-nilai yang memenuhi persamaan $1000^{(x^2 - 3x - 4)} = 1^{(x^2 - 2x - 3)}$ adalah

- A. $x_1 = 1, x_2 = \frac{9}{2}$
- B. $x_1 = -1, x_2 = \frac{9}{2}$
- C. $x_1 = -1, x_2 = \frac{7}{2}$
- D. $x_1 = 1, x_2 = -\frac{7}{2}$
- E. $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 9$

14. Bila

$$\frac{4^{(2^{3x-2})}}{5} + \frac{8^x}{20} = 1,$$

maka nilai x adalah

- A. $\frac{3}{2}$
- B. $\frac{2}{3}$
- C. $-\frac{2}{3}$
- D. $-\frac{3}{2}$
- E. 1

15. ${}^5 \log \sqrt{27} \cdot {}^9 \log 125 + {}^{16} \log 32 = \dots$

- A. $\frac{61}{36}$
- B. $\frac{9}{4}$
- C. $\frac{61}{20}$
- D. $\frac{41}{12}$
- E. $\frac{7}{2}$

16. Penyelesaian dari $2^{\log x} = 1$ adalah

- A. 0
- B. 1
- C. $\frac{1}{10}$
- D. 2
- E. 10

17. Jika $({}^a \log (3x - 1))({}^5 \log a) = 3$, maka nilai x adalah

- A. 36
- B. 39
- C. 42
- D. 45
- E. 48

18. Jika

$${}^a \log 81 - 2 \cdot {}^a \log 27 + {}^a \log 27 + {}^a \log 243 = 6,$$

maka nilai a sama dengan

- A. $\sqrt{3}$
- B. 3
- C. $\sqrt{3}$
- D. 9
- E. 12

19. Jika

$$(x+1) \log (x^3 + 3x^2 + 2x + 4) = 3.$$

maka nilai x adalah

- A. 0
- B. 1
- C. 3
- D. 5
- E. 9

20. Jika nilai ${}^5 \log 3 = a$ dan b , maka nilai dari

$${}^4 \log 15 \text{ adalah } \dots$$



A. $\frac{a+1}{ab}$
 B. $\frac{ab}{a+1}$
 C. $\frac{a+b}{a+1}$

D. $\frac{a+1}{a+b}$
 E. $\frac{ab}{a-1}$

e. $x^{2 \log x} = \frac{x^4}{8}$

f. ${}^2 \log(x-2) + {}^2 \log(x-3) = {}^2 \log 3 \cdot {}^3 \log 2$

g. ${}^6 \log(x-2) \leq 1$

h. $\log(x^2 + 4x + 4) \leq \log(5x + 10)$

II. Jawablah pertanyaan berikut dengan jelas dan tepat!

1. Hitunglah nilai x yang memenuhi tiap persamaan berikut ini!

a. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} = \sqrt[3]{2^{3x+1}}$

b. $\left(\frac{3}{3^{x-2}}\right)^2 = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

c. $(\sqrt{3})^{5x} > 9^{3x+7}$

d. $(\sqrt{5})^{x^3} < 25^{x^2 - \frac{3}{4}x}$

2. Suatu zat radioaktif yang meluruh dapat dinyatakan dengan persamaan

$$x(t) = x(0) \cdot e^{-\lambda t}$$

dengan

$x(t)$: Massa yang ditinggal setelah t detik

$x(0)$: Massa awal

λ : Konstanta peluruhan

Tunjukkanlah:

a. Laju peluruhan $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ yang memenuhi

persamaan $\frac{dx}{dt} = -\lambda \cdot x(t)$.

b. $t_{\frac{1}{2}} = \frac{0,693}{\lambda}$, jika $t_{\frac{1}{2}}$ adalah waktu paruh

Tugas Akhir

1. Nilai dari $\int (2x-3)^3 dx$ adalah

A. $\frac{1}{2}(2x-3)^4 + c$ D. $\frac{1}{8}(2x-3)^4 + c$
 B. $\frac{1}{4}(2x-3)^4 + c$ E. $\frac{1}{10}(2x-3)^4 + c$
 C. $\frac{1}{6}(2x-3)^4 + c$
2. Nilai dari $\int x \sin x dx$ adalah

A. $x \cos x + c$
 B. $-x \cos x + c$
 C. $x \cos x + \sin x + c$
 D. $-x \cos x + \sin x + c$
 E. $-x \cos x - \sin x + c$
3. Nilai dari $\int_0^{\pi} \cos x dx$ adalah

A. 0 D. 1
 B. $\frac{1}{4}$ E. $\frac{1}{2}$
 C. 2
4. Diketahui $f(x) = \int (x^2 - 2x + 5) dx$
 dan $f(0) = 5$ nilai $f(x) =$

A. $\frac{4}{3}x^3 - x^2 + 5x + 5$
 B. $\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 5x + 5$
 C. $\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 5x + 5$
 D. $\frac{1}{9}x^3 - 2x^2 + 5x + 3$
 E. $\frac{1}{9}x^3 - x^2 + 5x + 5$
5. Jika daerah yang dibatasi oleh grafik $f(x) = \frac{1}{4}x - 2$, sumbu- x , garis $x = 0$ dan garis $x = 4$ diputar 360° mengelilingi sumbu- y , maka volume benda putar adalah

A. $19\frac{1}{2}$ D. $21\frac{1}{3}$
 B. $19\frac{1}{3}$ E. $22\frac{1}{3}$
 C. $20\frac{1}{3}$
6. Suku ke- n dari barisan 3, 7, 11, adalah

A. 15 D. 47
 B. 39 E. 51
 C. 43
7. Jumlah 24 suku deret $2 + 4 + 6 +$ adalah

A. 50 D. 600
 B. 150 E. 1.200
 C. 300
8. Suku kesembilan dari barisan 16, 8, 4, adalah

A. 2 D. 1
 B. $\frac{1}{16}$ E. $\frac{1}{8}$
 C. 0
9. Jika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

maka $A(BC)$ adalah

A. $\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 9 & -10 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$
 B. $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ E. $\begin{pmatrix} 18 & 16 \\ 46 & 38 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$
 C. $\begin{pmatrix} 18 & 15 \\ 46 & 39 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

10. Misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Nilai A^3 adalah

- A. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 26 & 27 \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$
 B. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{26}{27} & \frac{1}{27} \end{bmatrix}$ E. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$
 C. $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

11. Invers dari $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ adalah

- A. $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$
 B. $\begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix}$
 C. $\begin{bmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$
 D. $\begin{bmatrix} -\cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$
 E. $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

12. Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, maka nilai

$B^{-1}A^{-1} =$

- A. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$
 B. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ E. $\begin{pmatrix} -7 & -6 \\ -9 & -8 \end{pmatrix}$
 C. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ \frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$

13. Jika $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,

maka $BA =$

- A. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 3 & -10 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$
 B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ E. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
 C. $\begin{pmatrix} 6 & -25 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

14. A adalah titik $(1, 2, 3)$, B adalah titik $(2, 4, 6)$, dan C adalah $(5, 10, 15)$. Nilai dari $AB : BC$ adalah

- A. 1 : 2 D. 2 : 3
 B. 1 : 3 E. 2 : 4
 C. 1 : 4

15. Jika vektor $a = (1 \ 1 \ 2)$. Besar dari vektor a adalah

- A. $\sqrt{4}$
 B. $\sqrt{5}$
 C. $\sqrt{6}$
 D. $\sqrt{8}$
 E. $\sqrt{10}$

16. Jika P adalah $(1, 2, 3)$ dan Q $(4, 5, 6)$. Panjang vektor PQ adalah

- A. 2
 B. 3
 C. 4
 D. 5
 E. 6

17. Nilai x dari $(2x^2 + 3 - 1)^{x^2 - 3x + 2} = 1$ adalah

- A. $x = \frac{1}{2}$ atau $x = -2$
 B. $x = \frac{1}{4}$ atau $x = -4$
 C. $x = -2$ atau $x = 2$
 D. $x = 3$ atau $x = -3$
 E. $x = -\frac{1}{2}$ atau $x = 2$

18. Diketahui $x^{2+1} \log(x^2 - 3) = x^{2+1} \log(x+3)$.

Nilai dari x adalah

- A. $x = 3$ atau $x = -2$
- B. $x = 4$ atau $x = 2$
- C. $x = 5$ atau $x = -2$
- D. $x = -3$ atau $x = 2$
- E. $x = -3$ atau $x = -2$

19. Diketahui ${}^2 \log(x^2 + 2x) = {}^2 \log 3$.

Nilai x adalah

- A. $x = -3$ atau $x = 1$
- B. $x = -3$ atau $x = -1$
- C. $x = 3$ atau $x = -1$
- D. $x = 3$ atau $x = 1$
- E. $x = -3$ atau $x = 2$

20. Diketahui ${}^2 \log(2x-3) = {}^2 \log(x+1)$.

Nilai x adalah

- A. 2
- B. 3
- C. 4
- D. 5
- E. 6



GLOSARIUM

absis	:	jarak di sepanjang sumbu horisontal pada grafik koordinat
asimtot	:	garis putus-putus pada sebuah grafik yang mewakili batas nilai dimana fungsi rasional atau hiperbola terdefinisi
barisan	:	suatu daftar bilangan-bilangan dalam urutan dan pola tertentu
barisan aritmetika	:	barisan bilangan dimana setiap suku setelah suku pertama berlaku tambahkan bilangan tertentu pada suku sebelumnya
barisan geometri	:	suatu barisan bilangan dengan suku-sukunya merupakan hasil kali suku sebelumnya dengan pengali yang tetap
bayangan	:	posisi akhir dari suatu bangun yang dihasilkan dari suatu transformasi
beda	:	selisih suatu suku dengan suku sebelumnya pada barisan aritmetika
bilangan	:	kombinasi angka-angka, seperti 12.254 atau 36.650
bilangan pokok	:	pada pemangkatan x^n , x adalah bilangan pokok
bilangan rasional	:	suatu bilangan yang mungkin dituliskan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dimana a dan b adalah bilangan asli dan b tidak sama dengan nol
bilangan real	:	suatu bilangan yang dapat ditulis dalam bentuk desimal
daerah asal	:	himpunan semua nilai x (bilangan pertama dalam setiap pasangan berurutan) dalam suatu relasi
daerah hasil	:	himpunan semua nilai y (bilangan kedua pada setiap pasangan berurutan) pada sebuah relasi
daerah kawan	:	himpunan semua nilai y (bilangan kedua dalam setiap pasangan berurutan) dalam suatu relasi
deret aritmetika	:	jumlah dari suku-suku barisan aritmetika
deret geometri	:	jumlah dari suku-suku pada barisan geometri
diagonal	:	suatu garis lurus yang menghubungkan dua sudut yang berbeda dari suatu bangun
eksponen	:	pada pemangkatan x^n , n adalah eksponen
elemen	:	anggota sebuah himpunan
eliminasi	:	dalam sistem persamaan, eliminasi berarti proses menggabungkan persamaan untuk menghilangkan salah satu peubahnya sehingga lebih mudah dikerjakan
faktor	:	suatu bilangan yang membagi bilangan lain dengan tepat, disebut juga pembagi
faktor skala	:	suatu bilangan yang mengalikan bilangan-bilangan lain untuk merubah ukurannya

fungsi	:	suatu aturan, biasanya berupa persamaan, tabel, atau grafik yang menghubungkan setiap anggota (biasanya suatu bilangan) dari satu himpunan bilangan pada anggota tertentu himpunan bilangan lain. Persamaan $y = 2x$ adalah suatu fungsi yang menggandakan setiap bilangan x
garis berpotongan gradien	:	garis-garis yang tepat berpotongan pada sebuah titik gradien dari suatu garis adalah rasio dari perubahan pada y terhadap perubahan di x
grafik	:	sebuah gambar yang menyatakan jawaban persamaan matematika
invers	:	operasi kebalikan dari suatu operasi tertentu
jajargenjang	:	suatu segiempat yang memiliki dua pasang sisi yang sejajar
keliling	:	jarak di sekeliling bangun datar
kongruen	:	mempunyai ukuran dan bentuk yang sama
konstanta	:	sesuatu yang tidak berubah, yang bukan merupakan variabel
koordinat	:	suatu pasangan terurut dari bilangan-bilangan yang dipasangkan dengan suatu titik pada bidang koordinat
koordinat cartesius	:	sistem untuk menyatakan posisi suatu titik pada sebuah bidang grafik
kuadrat	:	hasil kali sebuah bilangan dengan dirinya sendiri
lingkaran	:	kumpulan titik-titik pada bidang datar yang mempunyai jarak sama dari titik tertentu (tetap) pada bidang tersebut. Titik tertentu tersebut terletak di tengah lingkaran
logaritma	:	sebuah bilangan yang sudah ditentukan (bilangan pokok) yang dipangkatkan untuk menghasilkan sebuah bilangan
luas	:	ukuran ruang di dalam bangun dua dimensi
matriks	:	sebuah kumpulan bilangan atau peubah yang disusun sehingga berbentuk persegi panjang yang bisa digunakan untuk mewakili sistem persamaan
ordinat	:	jarak di sepanjang sumbu vertikal pada grafik koordinat
parabola	:	suatu grafik yang persamaannya $y = ax^2 + bx + c$, dengan $a \neq 0$
pencerminan	:	suatu transformasi (gerakan) dari bentuk geometri dengan suatu cermin
persamaan	:	kalimat matematika yang memiliki simbol "sama dengan" di dalamnya
persegi panjang	:	suatu segi empat yang mempunyai empat sudut siku-siku
pertidaksamaan	:	suatu kalimat/ Pernyataan yang memiliki satu dari simbol-simbol: $\neq, <, >, \leq, \geq$
pertidaksamaan linear	:	suatu kalimat linear yang tidak mengandung tanda "sama dengan" ($=$)

rasio	:	hasil bagi dari dua bilangan yang memiliki satuan sama
substitusi	:	dalam sistem dua persamaan dengan dua peubah, substitusi merupakan proses penyelesaian sebuah persamaan untuk mencari sebuah peubah dan mensubstitusikan hasilnya ke persamaan kedua untuk mendapatkan satu persamaan dalam satu peubah
suku	:	semua bilangan dalam sebuah barisan atau bagian polinomial yang terpisah dengan tanda + atau -
sumbu simetri	:	garis putus-putus atau lipatan suatu bangun datar untuk menghasilkan tepat dua bagian yang sama
sumbu-x	:	garis bilangan horisontal pada grafik koordinat
sumbu-y	:	garis bilangan vertikal pada grafik koordinat
transformasi	:	suatu operasi pada bangun geometri pada setiap titik-titiknya sehingga bangun tersebut menjadi bangun yang baru
translasi	:	suatu transformasi (gerakan) dari bentuk geometri dengan suatu pergeseran tanpa perputaran
volume	:	jumlah satuan kubik bagian dalam suatu bangun ruang

PUSTAKA ACUAN

- Arsyad, M. 2004. *Contextual Mathematics*. Jakarta: Literatur
- Aminulhayat. 2004. *Matematika*. Bogor: Regina
- Bostock, L., cs. 2002. *STP National Curriculum Mathematics 7A*. United Kingdom: Nelson Thornes
- Collins, W. 2001. *Mathematics Applications and Connection*. New York: Mc Graw-Hill
- Daiman, E. 2004. *Penuntun Belajar Matematika*. Bandung: Ganesha Exact
- Demana, F. and Waits, B. 1990. *College Algebra and Trigonometri*. New York: Addison Wesley
- Keng Seng, T., dan Chin Keong, L. 2002. *New Syllabus*. Singapura: Shinglee
- Nasution, A. H. 1995. *Matematika*. Jakarta: Balai Pustaka
- Neswan, O. dan Setya Budhi, W. 2003. *Matematika*. Bandung: ITB
- Phillips, D., cs. 2000. *Maths Quest for Victoria*. Australia: John Wiley
- Purcell, E. J., dan Varberg, D. 1995. *Kalkulus dan Geometri Analitik*. Jakarta: Erlangga
- Swee Hock, L., cs. 2001. *Matematik Tingkatan 4*. Kuala Lumpur: Darul Fikir
- Sobel, M. A., dan Maletsky, E. M. 2001. *Teaching Mathematics*. New York: Pearson
- Sembiring, S. 2002. *Olimpiade Matematika*. Bandung: Yrama Widya
- Simangunsong, W. dan Poyk. F. M. 2002. *Matematika Program Pemantapan Kemampuan Siswa*. Jakarta: Gematama
- Soka, Y. 1986. *Logika Matematika Elementer*. Bandung: Tarsito
- Tampomas, H. 1999. *Seribu Pena Matematika SMU*. Jakarta: Erlangga
- _____, 2004. *Matematika Plus*. Bogor: Yudhistira
- Wahyudin, H. 2002. *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia*. Jakarta: Tarity Samudra Berlian

KUNCI JAWABAN

ULANGAN BAB 1

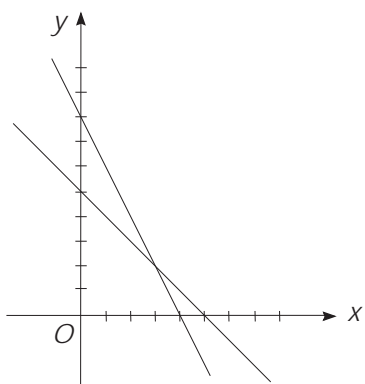
- I. 1. B 4. A 7. C 9. B
 2. A 5. B 8. D 10. B
 3. D 6. D

- II. 1. 15,625 %
 2. $S(t) = 5t - t^2 + 15$
 4. Ayu = $\frac{9}{8}$; Bernard = $\frac{9}{16}$

ULANGAN BAB 2

- I. 1. C 5. A 9. C 13. A
 2. A 6. C 10. D 14. A
 3. B 7. A 11. A 15. B
 4. A 8. D 12. C

- II. 1. Tidak
 2. 300 bungkus permen A dan 200 bungkus permen B



3. Rp275.000,00
 4. 50 buah
 5. 150 hari

ULANGAN BAB 3

- I. 1. A 4. B 7. C 9. D
 2. D 5. C 8. D 10. A
 3. B 6. A

- II. 1. 125π rad
 2. 20.100
 3. 80
 4. 330
 5. 20 bulan

ULANGAN BAB 4

- I. 1. D 5. C 9. B 13. C
 2. B 6. D 10. D 14. A
 3. C 7. A 11. A 15. C
 4. C 8. D 12. A

- II. 1. $-3\frac{1}{6}$
 2. $\begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} & 4\frac{1}{2} \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$
 3. 8
 4. -7
 5. a. -10
 b. 240

ULANGAN BAB 5

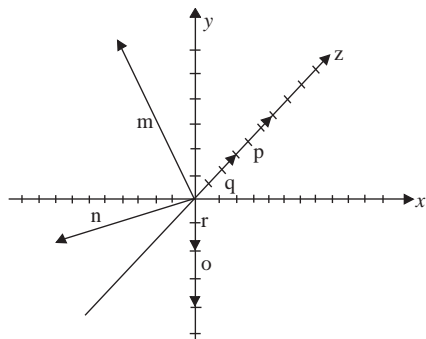
- I. 1. C 5. B 9. D 13. D
 2. D 6. D 10. D 14. C
 3. - 7. C 11. D 15. B
 4. - 8. C 12. D

- II. 1. a. (-2, 0, 4)
 b. (23, -14, 4)
 c. (-1, -5, 2)
 d. (-39, 69, -12)
 e. (-30, -7, 5)
 f. (0, -10, 0)
 3. a. $2\sqrt{3}$
 b. $\sqrt{2}(1 + \sqrt{7})$
 c. $4\sqrt{14}$
 d. $2\sqrt{2}$

e. $(\frac{1}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{4}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$

f. $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

2.



4. Bukti
5. Bukti

ULANGAN BAB 6

- I. 1. A 4. E 7. D 10. A
2. B 5. D 8. C 11. A
3. D 6. D 9. -

- II. 1. a. 1 : 2
b. 1 : 3
c. 1 : 4
d. 2 : 1
e. 3 : 2

3. a. Rotasi
b. Rotasi
c. Rotasi
d. Rotasi
e. Dilatasi
f. Dilatasi

ULANGAN BAB 7

- I. 1. E 6. A 11. C 16. B
2. D 7. D 12. B 17. C
3. A 8. B 13. B 18. B
4. E 9. D 14. B 19. A
5. D 10. B 15. E 20. A

- II. 1. a. $x = \frac{5}{9}$
b. $x = -\frac{2}{3}$
c. $x < -4$
d. $x < 0$ atau $1 < x < 3$
e. -
f. $x = 1$ atau $x = 4$
g. $x \leq 8$
h. $-2 \leq x \leq 3$
2. Bukti

TUGAS AKHIR

- I. 1. D 6. C 11. A 16. B
2. D 7. D 12. C 17. A
3. A 8. B 13. B 18. A
4. - 9. C 14. B 19. A
5. D 10. A 15. C 20. C

INDEKS

A

absis: 25
adjoint: 71, 72
antiturunan: 15, 17, 18
asimtot: 162, 164
aturan Cramer: 77

B

baris: 52–54, 65, 71, 72
barisan: 110–112, 114–116, 121, 124
barisan aritmetika: 110–112
barisan geometri: 114–116
beda: 110–112
bayangan: 133, 134, 138–142, 148, 152
bidang koordinat: 36
bilangan kuadrat: 121
bilangan pokok: 162–164, 174
bilangan rasional: 4, 165
bilangan real: 61, 62, 91

C

cara jajargenjang: 90
cermin: 138, 139

D

daerah asal: 162, 164
daerah hasil: 162, 164
deret: 110–112, 114, 116, 117, 120, 121, 124
deret aritmetika: 110–112, 121
deret geometri: 114, 116, 117, 121
deret geometri divergen: 117
deret geometri konvergen: 117
determinan: 69, 71, 74
diagonal: 54
dilatasi: 151–153

E

elemen matriks: 50, 51, 63

F

faktor dilatasi: 151
faktor skala: 151
fungsi eksponen: 162–165, 171
fungsi kuadrat: 13
fungsi logaritma: 162–164, 173, 177
fungsi naik: 162, 171, 177
fungsi objektif: 41, 43–45
fungsi turun: 164, 171, 177

G

George Fredrich Gernhard Riemann: 15

I

induksi matematika: 120, 121
integral: 2, 4, 5, 7–10, 13–16, 21
integral parsial: 5, 7
integral substitusi: 4, 6
integral tak tentu: 4, 15
integral tertentu: 13–15, 21
integral trigonometri: 5, 8
invers matriks: 69, 71

K

kaidah Sarrus: 69, 74
kofaktor: 71, 72, 74
kolom: 52–54, 65, 71, 77
kongruen: 139
konstanta: 2–5, 16
koordinat kartesius: 44, 84, 89, 95, 132, 162, 163
kurva: 14, 21–24, 28, 29, 162, 163
lingkaran: 26, 138, 139, 146, 151

L

Leibniz: 2
logaritma: 173, 174, 177
luas: 13–15, 21–26

M

matriks: 52–55, 57, 58, 61, 62, 64, 65, 65, 67, 71, 72, 74, 76, 77

matriks baris: 53

matriks diagonal: 53

matriks identitas: 54

matriks kolom: 53

matriks minor: 71, 74

matriks nol: 53

matriks persegi: 53, 54, 69

matriks skalar: 53

matriks segitiga atas: 54

matriks segitiga bawah: 54

metode garis selidik: 41, 44, 45

metode uji titik pojok: 41–43

model matematika: 39, 41

N

nilai optimum: 41, 44

notasi sigma: 14, 121, 123

O

ordinat: 29

ordo: 52, 53, 58, 61, 69, 71, 72, 74

P

panjang vektor: 84, 85

pencerminan: 138–142

perkalian skalar: 94, 100, 101

persamaan eksponen: 165, 167

pertidaksamaan eksponen: 165, 171

program linear: 39, 41

proyeksi vektor: 100–102

R

rasio: 115, 116

refleksi: 138, 139, 141, 153

rotasi: 146–148, 154

S

saling invers: 71

seismograf: 161

sistem pertidaksamaan linear: 36, 37, 39

sistem persamaan linear: 76, 77

skalar: 94, 96, 97, 100, 101

sudut rangkap: 9, 10

T

teorema dasar kalkulus: 15

transformasi geometri: 153

translasi: 132–134

transpos matriks: 54

turunan: 2, 3, 7

V

vektor: 84–86, 89–92, 94–96, 98, 100, 102

vektor satuan: 85, 86, 101, 102

volume benda putar: 26–29