

Integral

B A B

1



Sumber: www.wallpaperbase.com

Pernahkah kalian melihat baling-baling pesawat? Bagaimanakah bentuknya? Ketika pesawat hendak mendarat, baling-baling pesawat akan berputar dengan kecepatan tinggi. Bagaimanakah bentuk baling-baling itu saat berputar? Saat baling-baling berputar, kalian akan mengamati sebuah bentuk seperti lingkaran. Dapatkah kalian mengetahui luas lingkaran yang terbentuk dari perputaran baling-baling itu? Dengan menggunakan integral, kalian akan dapat mengetahuinya.

- A. Pengertian Integral
- B. Integral Tak Tentu
- C. Integral Tertentu
- D. Menentukan Luas Daerah
- E. Menentukan Volume Benda Putar

A. Pengertian Integral

Di Kelas XI, kalian telah mempelajari konsep turunan. Pemahaman tentang konsep turunan ini dapat kalian gunakan untuk memahami konsep integral. Untuk itu, coba tentukan turunan fungsi-fungsi berikut.

- $f_1(x) = 3x^3 + 3$
- $f_2(x) = 3x^3 + 7$
- $f_3(x) = 3x^3 - 1$
- $f_4(x) = 3x^3 - 10$
- $f_5(x) = 3x^3 - 99$

Perhatikan bahwa fungsi-fungsi tersebut memiliki bentuk umum $f(x) = 3x^3 + c$, dengan c suatu konstanta. Setiap fungsi ini memiliki turunan $f'(x) = 9x^2$.

Jadi, turunan fungsi $f(x) = 3x^3 + c$ adalah $f'(x) = 9x^2$.

Sekarang, bagaimana jika kalian harus menentukan fungsi $f(x)$ dari $f'(x)$ yang diketahui? Menentukan fungsi $f(x)$ dari $f'(x)$, berarti menentukan antiturunan dari $f'(x)$. Sehingga, integral merupakan antiturunan (antidiferensial) atau operasi invers terhadap diferensial.

Jika $F(x)$ adalah fungsi umum yang bersifat $F'(x) = f(x)$, maka $F(x)$ merupakan antiturunan atau integral dari $f(x)$.

Pengintegralan fungsi $f(x)$ terhadap x dinotasikan sebagai berikut.

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

dengan:

\int = notasi integral (yang diperkenalkan oleh Leibniz, seorang matematikawan Jerman)

$f(x)$ = fungsi integran

$F(x)$ = fungsi integral umum yang bersifat $F'(x) = f(x)$

c = konstanta pengintegralan

Sekarang, perhatikan turunan fungsi-fungsi berikut.

- $g_1(x) = x$, didapat $g_1'(x) = 1$.

Jadi, jika $g_1'(x) = 1$ maka $g_1(x) = \int g_1'(x) dx = x + c_1$.

- $g_2(x) = \frac{1}{2}x^2$, didapat $g_2'(x) = x$.

Jadi, jika $g_2'(x) = x$ maka $g_2(x) = \int g_2'(x) dx = \frac{1}{2}x^2 + c_2$.

- $g_3(x) = \frac{1}{3}x^3$, didapat $g_3'(x) = x^2$.

Jadi, jika $g_3'(x) = x^2$ maka $g_3(x) = \int g_3'(x) dx = \frac{1}{3}x^3 + c_3$.

- $g_4(x) = \frac{1}{6}x^6$, didapat $g_4'(x) = x^5$.

Jadi, jika $g_4'(x) = x^5$ maka $g_4(x) = \int g_4'(x) dx = \frac{1}{6}x^6 + c_4$.



Dari uraian ini, tampak bahwa jika $g'(x) = x^n$, maka $g(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$ atau dapat dituliskan $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, n \neq -1$.

Sebagai contoh, turunan fungsi $f(x) = 3x^3 + c$ adalah $f'(x) = 9x^2$. Ini berarti, antiturunan dari $f'(x) = 9x^2$ adalah $f(x) = 3x^3 + c$ atau dituliskan $\int f'(x) dx = 3x^3 + c$.

Uraian ini menggambarkan hubungan berikut.

Jika $f'(x) = x^n$, maka $f(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, n \neq -1$ dengan c suatu konstanta

Contoh

1. Tentukanlah turunan dari setiap fungsi berikut!

a. $f(x) = 5x^2 + 10$

c. $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x$

b. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$

d. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 1$

Jawab:

a. $f'(x) = (2 \cdot 5)x^{2-1} + 0 = 10x$

b. $f'(x) = (3 \cdot 2)x^{3-1} + (2 \cdot 3)x^{2-1} - (1 \cdot 4)x^{1-1} + 0$
 $= 6x^2 + 6x - 4$

c. $f'(x) = \left(3 \cdot \frac{1}{2}\right)x^{3-1} + (1 \cdot 2)x^{1-1}$
 $= \frac{3}{2}x^2 + 2$

d. $f'(x) = \left(4 \cdot \frac{1}{4}\right)x^{4-1} + \left(3 \cdot \frac{1}{3}\right)x^{3-1} + \left(2 \cdot \frac{1}{2}\right)x^{2-1} + 0$
 $= x^3 + x^2 + x$

2. Tentukanlah antiturunan x jika diketahui:

a. $g_1'(x) = x^3$

c. $g_3'(x) = 3x^4 - 2x$

b. $g_2'(x) = 2x^6 + 3$

d. $g_4'(x) = x^2 + 4x - \frac{1}{2}$

Jawab:

a. $g_1(x) = \frac{1}{3+1}x^{3+1} = \frac{1}{4}x^4 + c$

b. $g_2(x) = \frac{2}{6+1}x^{6+1} + \frac{3}{0+1}x^{0+1} = \frac{2}{7}x^7 + 3x + c$

c. $g_3(x) = \frac{3}{4+1}x^{4+1} - \frac{2}{1+1}x^{1+1} + c = \frac{3}{5}x^5 - \frac{2}{2}x^2 = \frac{3}{5}x^5 - x^2 + c$

$$\begin{aligned}
 \text{d. } g_4(x) &= \frac{1}{2+1}x^{2+1} + \frac{4}{1+1}x^{1+1} - \frac{-\frac{1}{2}}{0+1x^0+1} + c \\
 &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^1 + c \\
 &= \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{1}{2}x + c
 \end{aligned}$$

B. Integral Tak Tentu

Pada bagian sebelumnya, kalian telah mengetahui bahwa integral merupakan antiturunan. Jadi, apabila terdapat fungsi $F(x)$ yang dapat didiferensialkan pada interval $[a, b]$ sedemikian hingga $\frac{d(F(x))}{dx} = f(x)$, maka antiturunan dari $f(x)$ adalah $F(x) + c$. Secara matematis, ditulis

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

di mana $\int dx$ = Lambang integral yang menyatakan operasi antiturunan
 $f(x)$ = Fungsi integran, yaitu fungsi yang dicari antiturunannya
 c = Konstanta

Sebagai contoh, dapat kalian tuliskan

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

karena

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^3}{3} + c \right) = x^2$$

Sehingga kalian dapat memandang integral tak tentu sebagai wakil keseluruhan keluarga fungsi (satu antiturunan untuk setiap nilai konstanta c). Pengertian tersebut dapat digunakan untuk membuktikan teorema- teorema berikut yang akan membantu dalam pengerjaan hitung integral.

Teorema 1

Jika n bilangan rasional dan $n \neq -1$, maka $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$ di mana c adalah konstanta.

Teorema 2

Jika f fungsi yang terintegralkan dan k suatu konstanta, maka

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$$

Teorema 3

Jika f dan g fungsi-fungsi yang terintegralkan, maka

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Teorema 4

Jika f dan g fungsi-fungsi yang terintegralkan, maka

$$\int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

Teorema 5

Aturan integral substitusi

Jika u suatu fungsi yang dapat didiferensialkan dan r suatu bilangan rasional tak nol, maka $\int (u(x))^r u'(x) dx = \frac{1}{r+1} (u(x))^{r+1} + c$, di mana c adalah konstanta dan $r \neq -1$.

Teorema 6

Aturan integral parsial

Jika u dan v fungsi-fungsi yang dapat didiferensialkan, maka

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Teorema 7

Aturan integral trigonometri

- $\int \cos x dx = \sin x + c$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$

di mana c adalah konstanta

Pembuktian Teorema 1

Untuk membuktikan **Teorema 1**, kalian dapat mendiferensialkan $x^{n+1} + c$ yang terdapat pada ruas kanan seperti berikut.

$$\frac{d}{dx}(x^{n+1} + c) = (n+1)x^n \quad \dots \text{ kalikan kedua ruas dengan } \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{d}{dx}[x^{n+1} + c] = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1)x^n$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} + c\right] = x^n$$

$$\text{Sehingga } \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

Pembuktian Teorema 3 dan 4

Untuk membuktikan **Teorema 4**, kalian dapat mendiferensialkan $\int f(x) dx \pm \int g(x) dx$ yang terdapat pada ruas kanan seperti berikut.

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x) dx \pm \int g(x) dx\right] = \frac{d}{dx}\left[\int f(x) dx\right] \pm \frac{d}{dx}\left[\int g(x) dx\right] = f(x) \pm g(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x) dx \pm \int g(x) dx\right] = f(x) \pm g(x)$$

Sehingga didapat:

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

Contoh

Hitunglah integral dari $\int (3x^2 - 3x + 7) dx$!

Jawab:

$$\int (3x^2 - 3x + 7) dx = 3 \int x^2 dx - 3 \int x dx + \int 7 dx \quad (\text{Teorema 2, 3, dan 4})$$

$$= \frac{3}{2+1} x^{2+1} - \frac{3}{1+1} x^{1+1} + 7x + c \quad (\text{Teorema 1})$$

$$= x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 7x + c$$

$$\text{Jadi, } \int (3x^2 - 3x + 7) dx = x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 7x + c.$$

Pembuktian Teorema 6

Di kelas XI, kalian telah mengetahui turunan hasil kali dua fungsi

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \text{ adalah } \frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x).$$

Akan dibuktikan aturan integral parsial dengan rumus tersebut. Caranya adalah dengan mengintegrasikan kedua ruas persamaan seperti berikut.

$$\int \frac{d}{dx}[u(x) \cdot v(x)] = \int u(x) \cdot v'(x) dx + \int v(x) \cdot u'(x) dx$$

$$u(x) \cdot v(x) = \int u(x) \cdot v'(x) dx + \int v(x) \cdot u'(x) dx$$

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) dx$$

Karena

$$v'(x) dx = dv \text{ dan } u'(x) dx = du$$

Maka persamaan dapat ditulis

$$\int u dv = uv - \int v du$$

B.1. Aturan Integral Substitusi

Aturan integral substitusi seperti yang tertulis di Teorema 5. Aturan ini digunakan untuk memecahkan masalah pengintegralan yang tidak dapat diselesaikan dengan rumus-rumus dasar yang sudah dipelajari. Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut ini.

Contoh

Hitunglah integral dari:

a. $\int x\sqrt{9-x^2} dx$

b. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

c. $\int \frac{x}{(1-2x^2)^4} dx$

Jawab:

a. Misalkan $u = 9 - x^2$, maka $du = -2x dx$

$$x dx = \frac{du}{-2}$$

$$\int x\sqrt{9-x^2} dx = \int (9-x^2)^{\frac{1}{2}} x dx = \int u^{\frac{1}{2}} \left(\frac{du}{-2} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{2} \times \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{u^3}}{\frac{3}{2}} + c = -\frac{1}{3} u\sqrt{u} + c$$

$$= \frac{1}{3} (9-x^2)\sqrt{9-x^2} + c$$

$$\text{Jadi, } \int x\sqrt{9-x^2} dx = -\frac{1}{3} (9-x^2)\sqrt{9-x^2} + c.$$

b. Misalkan $u = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$dx = 2\sqrt{x} du, \text{ sehingga}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{\sin u}{\sqrt{x}} \cdot 2\sqrt{x} du \\ &= 2 \int \sin u du \\ &= -2 \cos u + c \\ &= -2 \cos \sqrt{x} + c \end{aligned}$$

c. Misalkan $u = 1 - 2x^2$, maka $du = -4x dx$

$$dx = \frac{du}{-4x}$$

sehingga integral tersebut dapat ditulis sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(1-2x^2)^4} dx &= \int \frac{x}{u^4} \cdot \frac{du}{(-4x)} && \text{(Teorema 5)} \\ &= -\frac{1}{4} \int u^{-4} du \\ &= \left(-\frac{1}{4}\right) \left(-\frac{1}{3}\right) u^{-3} + c \\ &= \frac{1}{12} u^{-3} + c \end{aligned}$$

Substitusi $u = 1 - 2x^2$ ke persamaan $\frac{1}{12} u^{-3} + c$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(1-2x^2)^4} dx &= \frac{1}{12} u^{-3} + c \\ &= \frac{1}{12} (1-2x^2)^{-3} + c \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } \int \frac{x}{(1-2x^2)^4} dx = \frac{1}{12} (1-2x^2)^{-3} + c = \frac{1}{12(1-2x^2)^3} + c.$$

Pembuktian Teorema 7

Di Kelas XI, kalian telah mempelajari turunan fungsi trigonometri,

$$\text{yaitu } \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x, \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x, \text{ dan } \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x.$$

Berikut ini akan dibuktikan **aturan integral trigonometri** menggunakan rumus tersebut. Caranya adalah dengan mengintegrasikan kedua ruas seperti berikut.

- Dari $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ diperoleh $\int \cos x dx = \sin x + c$
- Dari $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ diperoleh $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- Dari $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ diperoleh $\int \sec^2 x = \tan x + c$

B.2. Integral dengan Bentuk $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, dan $\sqrt{x^2 - a^2}$

Pengintegralan bentuk-bentuk $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, dan $\sqrt{x^2 - a^2}$ dapat dilakukan dengan menggunakan substitusi dengan $x = a \sin t$, $x = a \tan t$, $x = a \sec t$. Sehingga diperoleh bentuk-bentuk seperti ini.

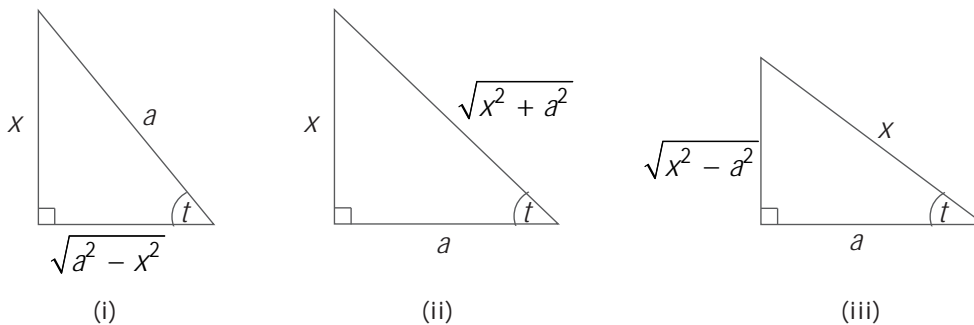
- $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = \sqrt{a^2 (1 - \sin^2 t)}$
 $= \sqrt{a^2 \cos^2 t} = a \cos t$
- $\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 t} = \sqrt{a^2 (1 + \tan^2 t)}$
 $= \sqrt{a^2 \sec^2 t} = a \sec t$
- $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 t - a^2} = \sqrt{a^2 (\sec^2 t - 1)}$
 $= \sqrt{a^2 \tan^2 t} = a \tan t$

Ingat

$$\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$$

$$\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$$

$$\int \sec^2(ax + b) dx = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + c$$



Gambar 1.1

Segitiga siku-siku untuk integral substitusi trigonometri:

(i) $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$, (ii) $\sqrt{a^2 + x^2} = a \sec t$, (iii) $\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan t$

Contoh

1. Hitunglah setiap integral berikut!

a. $\int \sin(3x+1) \cos(3x+1) dx$

b. $\frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx$

Jawab:

- a. Untuk mengerjakan integral ini, terlebih dahulu kalian harus mengubah $\sin(3x+1) \cos(3x+1)$ ke dalam rumus trigonometri sudut rangkap, yaitu

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha.$$

Dengan rumus ini, kalian mendapatkan:

$$\begin{aligned} \int \sin(3x+1) \cos(3x+1) dx &= \int \frac{1}{2} \sin(6x+2) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sin(6x+2) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{-6} \right) \cos(6x+2) + c \\ &= -\frac{1}{12} \cos(6x+2) + c \end{aligned}$$

Jadi, $\int \sin(3x+1) \cos(3x+1) dx = -\frac{1}{12} \cos(6x+2) + c$

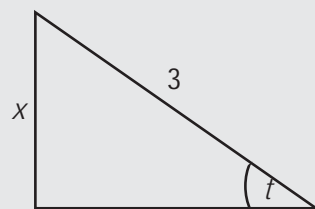
- b. Misalkan, $x = 3 \sin t$, maka $\sin t = \frac{x}{3}$ dan $dx = 3 \cos t dt$.

Sekarang, perhatikan segitiga berikut ini!

Dari segitiga di samping,

$$\cos t = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$$

$$\sqrt{9-x^2} = 3 \cos t$$



$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx = \int \frac{(3 \sin t)^2}{3 \cos t} \cdot 3 \cos t dt$$

$$= 9 \int \sin^2 t dt$$

$$= 9 \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) dt$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx = \frac{9}{2} \int (1 - \cos 2t) dt$$

$$= \frac{9}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) + c$$

$$= \frac{9}{2} t - \frac{9}{4} \sin 2t + c$$

$$= \frac{9}{2} t - \frac{9}{2} \sin t \cos t + c$$

$$= \frac{9}{2} \sin^{-1} \frac{x}{3} - \frac{9}{2} \left(\frac{x}{3} \cdot \frac{\sqrt{9-x^2}}{3} \right) + c$$

$$= \frac{9}{2} \sin^{-1} \frac{x}{3} - \frac{x}{2} \sqrt{9-x^2} + c$$

Jadi, $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx = \frac{9}{2} \sin^{-1} \frac{x}{3} - \frac{x}{2} \sqrt{9-x^2} + c$

Ingat

Integral bentuk:

- $\sqrt{a^2 - x^2}$ diubah menjadi $x = a \sin t$
- $\sqrt{a^2 + x^2}$ diubah menjadi $x = a \tan t$
- $\sqrt{x^2 - a^2}$ diubah menjadi $x = a \sec t$

Ingat, rumus kosinus sudut rangkap
 $\cos 2t = 1 - 2 \sin^2 t$

2. Jika $g'(x) = 2x - 3$ dan $g(2) = 1$, tentukanlah $g(x)$.

Jawab:

$$\begin{aligned}g(x) &= \int g'(x) dx \\ &= \int (2x - 3) dx \\ &= x^2 - 3x + c\end{aligned}$$

Karena $g(2) = 1$, maka c dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}g(x) &= x^2 - 3x + c \\ g(2) &= 2^2 - 3 \cdot 2 + c \\ 1 &= 4 - 6 + c \\ 1 &= -2 + c \\ c &= 1 + 2 \\ c &= 3\end{aligned}$$

Jadi, $g(x) = x^2 - 3x + 3$

3. Tentukan persamaan kurva yang melalui titik $(-2, 12)$ dan memiliki persamaan gradien garis singgung $\frac{dy}{dx} = 6x - 15$.

Jawab:

$$\frac{dy}{dx} = 6x - 15$$

$$y = \int (6x - 15) dx = 3x^2 - 15x + c$$

$$f(x) = 3x^2 - 15x + c$$

Karena kurva melalui titik $(-2, 12)$, maka:

$$\begin{aligned}f(-2) &= 3(-2)^2 - 15(-2) + c \\ 12 &= 3 \cdot 4 + 30 + c \\ 12 &= 12 + 30 + c \\ 12 &= 42 + c \\ c &= 12 - 42 \\ c &= -30\end{aligned}$$

Jadi, persamaan kurva tersebut adalah $f(x) = 3x^2 - 15x - 30$.

Asah Kompetensi 1

1. Hitunglah setiap integral berikut!

a. $\int 2x^3 dx$

c. $\int (\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + 3) dx$

b. $\int (4x^2 + 3x + 5) dx$

d. $\int (5x^3 + 10x^2 + 3x + \frac{1}{4}) dx$

2. Jika $g'(x) = 4x - 5$ dan $g(3) = 6$, tentukanlah $g(x)$.

3. Tentukanlah persamaan kurva yang melalui titik $(1, -2)$ dan memiliki gradien garis singgung

$$\frac{dy}{dx} = x - 3.$$



ASAH KEMAMPUAN

Waktu : 90 menit

1. Tentukanlah integral berikut!

Bobot soal: 30

- | | |
|---|--|
| a. $\int x^{\frac{2}{3}} dx$ | i. $\int \frac{(\sqrt{x}+4)^3}{\sqrt{x}} dx$ |
| b. $\int (5x^4 + \pi) dx$ | j. $\int \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-2} dx$ |
| c. $\int (18x^8 - 25x^4 + 3x^2) dx$ | k. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3} dx$ |
| d. $\int \frac{4x^6 + 3x^5 - 8}{x^5} dx$ | l. $\int (x+2)\sqrt{x^2+4x+1} dx$ |
| e. $\int \left(\frac{4}{x^5} - \frac{3}{x^4}\right) dx$ | m. $\int x\sqrt{4x+1} dx$ |
| f. $\int (x^3 + \sqrt{x}) dx$ | n. $\int x^2\sqrt{1-x} dx$ |
| g. $\int \sqrt{3x+2} dx$ | o. $\int (\sqrt{2-x}+4) dx$ |
| h. $\int x^2(x^3+5)^9 dx$ | |

2. Tentukanlah setiap integral berikut!

Bobot soal: 30

- | | |
|----------------------------------|---|
| a. $\int (\sin x + \cos x) dx$ | f. $\int \left(\frac{\sin x}{\cos^6 x} + \frac{\cos 8x}{\sqrt[4]{\sin 8x}}\right) dx$ |
| b. $\int (x^2 - 2\sin x) dx$ | g. $\int (8\sin 9x \cos 3x - 6\sin 9x \sin 3x) dx$ |
| c. $\int \sin x \cos^2 x dx$ | h. $\int (\sin^5 x^2)(x \cos x^2) dx$ |
| d. $\int (3\sin x - 4\cos x) dx$ | i. $\int (x^2 + 1)^3 x \cdot \sin^3(x^2 + 1)^4 \cos(x^2 + 1)^4 dx$ |
| e. $\int \sin 5x \sin 4x dx$ | j. $\int (2x+1)\sin 3x dx$ |

3. Tentukanlah fungsi $g(t)$, jika diketahui:

Bobot soal: 20

- $g'(t) = 7$ dan $g(0) = 0$
- $g'(t) = 3t^2 + 8t - 1$ dan $g(2) = 5$
- $g'(t) = 6t^2 + 4t + 1$ dan $g(1) = 5$
- $g'(t) = t - \frac{1}{t^2}$ dan $g(2) = 4\frac{1}{2}$
- $g'(t) = \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}$ dan $g(4) = 3\frac{1}{3}$
- $g'(t) = \frac{1}{\sqrt{t+1}}$ dan $g(3) = 18$
- $g'(t) = \sqrt{2t-1}$ dan $g\left(\frac{1}{2}\right) = -1$
- $g'(t) = 3\sqrt{t}$ dan $g(4) = 19$

UMPTN 1994



- Tentukanlah persamaan kurva yang melalui titik (2, 8) dan memiliki persamaan gradien garis singgung $\frac{dy}{dx} = 2\left(x - \frac{1}{x^2}\right)$.
- Tentukanlah persamaan kurva yang melalui titik (1, 2) dan gradien garis singgung pada sebarang titiknya adalah setengah koordinat- y .

Bobot soal: 10

Bobot soal: 10

C. Integral Tertentu

C.1. Memahami Luas Sebagai Limit Suatu Jumlah

Sebelumnya kalian telah mempelajari grafik fungsi kuadrat. Daerah grafik fungsi kuadrat berupa garis lengkung. Berapakah luas daerah yang batas-batasnya berupa garis lengkung ini? Untuk mengetahui, lakukanlah aktivitas berikut.

Aktivitas di Kelas

- Gambarlah grafik fungsi kuadrat, misalnya $f(x) = 9 - x^2$ pada interval $[0, 3]$.
- Bagi selang menjadi n selang bagian yang lebarnya masing-masing $\Delta x = \frac{3}{n}$, memakai titik-titik $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = 3$.
- Buat persegi panjang-persegi panjang yang alasnya Δx dan tingginya $f(x_i)$. Tentukan pula luas setiap persegi panjang tersebut!
- Jumlahkan luas setiap persegi panjang tersebut!
- Dengan memilih Δx sekecil-kecilnya hingga mendekati nol, hitunglah limit jumlah dari hasil pada **langkah 4**. Hasil yang kalian dapatkan menunjukkan luas daerah yang dibatasi kurva $f(x) = 9 - x^2$, sumbu- x , garis $x = 0$, dan $x = 3$.
- Buatlah kesimpulannya dan diskusikan kesimpulan tersebut dengan teman-temanmu!

Dari **Aktivitas** ini, kalian memperoleh daerah yang akan ditentukan luasnya.

Setelah membagi interval $[0, 3]$ menjadi n selang bagian yang lebarnya

masing-masing $\Delta x = \frac{3}{n}$, kalian memperoleh:

$$x_0 = 0$$

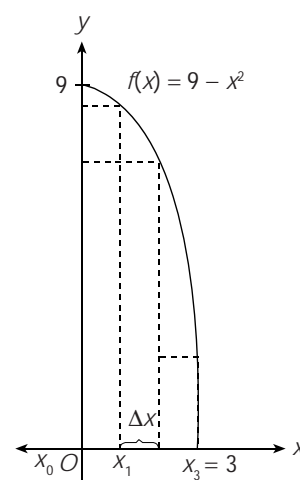
$$x_1 = \Delta x = \frac{3}{n}$$

$$x_2 = 2\Delta x = \frac{6}{n}$$

$$x_3 = 3\Delta x = \frac{9}{n}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$x_i = i\Delta x = \frac{3i}{n}$$



Gambar 1.2
Daerah yang dibagi menjadi n selang bagian

Luas setiap persegi panjang pada gambar tersebut adalah:

$$f(x_i) \Delta x = f\left(\frac{3i}{n}\right) \times \frac{3}{n} = \left(9 - \left(\frac{3i}{n}\right)^2\right) \times \frac{3}{n} = \left(\frac{27}{n} - \frac{27}{n^3} i^2\right)$$

Luas seluruh persegi panjang adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} L &= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x \quad \dots\dots(*) \\ &= \left(\frac{27}{n} - \frac{27}{n^3} 1^2\right) + \left(\frac{27}{n} - \frac{27}{n^3} 2^2\right) + \dots + \left(\frac{27}{n} - \frac{27}{n^3} n^2\right) \\ &= n \cdot \frac{27}{n} - \frac{27}{n^3} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \\ &= 27 - \frac{27}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = 27 - \frac{9}{2} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 18 - \frac{9}{2} \left(\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Dengan memilih $\Delta x \rightarrow 0$ maka $n \rightarrow \infty$, sehingga akan diperoleh luas daerah yang dibatasi kurva $f(x) = 9 - x^2$, sumbu- x , garis $x = 0$, dan $x = 3$ sebagai berikut.

$$L(R) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(18 - \frac{9}{2} \left(\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right) = 18$$

Sekarang, perhatikan kembali persamaan berikut.

$$L(R_n) = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x$$

Dengan menggunakan notasi sigma, kalian dapat menuliskan persamaan tersebut sebagai berikut.

$$L(R_n) = \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

Jika $\Delta x \rightarrow 0$, maka akan diperoleh

$$L(R_n) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

Dengan mengambil batas daerah $x_1 = a$ dan $x_2 = b$, maka bentuk di atas merupakan suatu bentuk integral tertentu yang dituliskan sebagai

$$L = \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{Sehingga diperoleh } \int_0^3 (9 - x^2) dx = \left[9x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = 27 - 9 = 18.$$

Jika fungsi f terdefinisi pada interval $[a, b]$, maka $\int_a^b f(x) dx$ adalah integral tertentu terhadap fungsi f dari a ke b . Pengintegralannya dituliskan sebagai berikut.

$$\int_a^b f(x) dx = [f(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

dengan:

$f(x)$ = fungsi integran

a = batas bawah

b = batas atas

Sehingga kalian harus dapat membedakan bahwa integral tertentu $\int_a^b f(x) dx$ adalah bilangan, sedangkan integral tak tentu yang dibahas sebelumnya adalah fungsi.

Asah Kompetensi 2

Gambarlah daerah dari integral tertentu berikut. Kemudian, hitunglah integral tersebut!

1. $\int_0^1 5x dx$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

2. $\int_{-2}^1 (x-1) dx$

5. $\int_{-3}^3 |x| dx$

3. $\int_0^3 x^2 dx$

6. $\int_0^{\pi} \cos^2 x dx$



Sahabat Kita

Siapakah orang yang pertama kali menemukan integral tertentu? Dia adalah George Friedrich Bernhard Riemann, seorang Matematikawan asal Jerman yang lahir pada tahun 1826. Riemann menjelaskan integral tertentu dengan menggunakan luas daerah yang dihitungnya menggunakan poligon dalam dan poligon luar. Untuk mengenang jasanya, integral tertentu tersebut dinamakan integral Riemann. Riemann meninggal pada tahun 1866.



Sumber:
<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk>

Gambar 1.3 Riemann

Sumber: *Calculus and Geometry Analitic*

C. 2. Teorema Dasar Kalkulus

Berdasarkan definisi integral tertentu, maka dapat diturunkan suatu teorema yang disebut dengan Teorema Dasar Kalkulus.

Jika f kontinu pada interval $[a, b]$ dan andaikan F sembarang antiturunan dari f pada interval tersebut, maka $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Dalam pengerjaan hitung integral tertentu ini akan lebih mudah jika kalian menggunakan teorema-teorema berikut.

Teorema 1

Kelinearan

Jika f dan g terintegralkan pada interval $[a, b]$ dan k suatu konstanta, maka

$$\text{a. } \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{b. } \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\text{c. } \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

Teorema 2

Perubahan batas

Jika f terintegralkan pada interval $[a, b]$ maka:

$$\text{a. } \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\text{b. } \int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$$

Teorema 3

Teorema penambahan interval

Jika f terintegralkan pada suatu interval yang memuat tiga titik $a, b,$ dan $c,$ maka

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Teorema 4

Kesimetrian

$$\text{a. } \text{Jika } f \text{ fungsi genap, maka } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$\text{b. } \text{Jika } f \text{ fungsi ganjil, maka } \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

Akan dibuktikan teorema 1a dan 1c, teorema 2b, dan teorema 3.

Pembuktian Teorema 1a

1a. Jika $F(x)$ sembarang antiturunan dari $f(x)$, maka

$$\begin{aligned}\int_a^b kf(x) dx &= [kF(x)]_a^b \\ &= kF(b) - kF(a) \\ &= k(F(b) - F(a)) \\ &= k \int_a^b f(x) dx\end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

Pembuktian Teorema 1b dan 1c

1b. Jika $F(x)$ dan $G(x)$ masing-masing sembarang antiturunan dari $f(x)$ dan $g(x)$, maka

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx &= [F(x) \pm G(x)]_a^b \\ &= (F(b) \pm G(b)) - (F(a) \pm G(a)) \\ &= (F(b) \pm F(a)) - (G(b) \pm G(a)) \\ &= \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx\end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$

Pembuktian Teorema 2b

2b. Jika $F(x)$ sembarang antiturunan dari $f(x)$, maka

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= [F(x)]_a^b \\ &= F(b) - F(a) \\ &= -(F(a) - F(b)) \\ &= - \int_b^a f(x) dx\end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Pembuktian Teorema 3

Jika $F(x)$ sembarang antiturunan dari $f(x)$, maka

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x) dx &= [F(x)]_a^c \\ &= F(c) - F(a) \\ &= (F(c) - F(b)) + (F(b) - F(a)) \\ &= \int_b^c f(x) dx + \int_a^b f(x) dx\end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } \int_a^c f(x) dx = \int_b^c f(x) dx + \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

Contoh

1. Hitunglah $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin 3x + \cos x) dx$.

Jawab:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin 3x + \cos x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x dx + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx \quad (\text{Teorema 1b}) \\ &= \left[-\frac{1}{3} \cos 3x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= -\frac{1}{3} \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) + \left(\sin \frac{\pi}{6} - \sin 0 \right) \\ &= -\frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{6}\end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin 3x + \cos x) dx = \frac{5}{6}.$$

2. Tentukan $\int_{-1}^1 x^2 dx$.

Jawab:

Oleh karena untuk $f(x) = x^2$, berlaku $f(-x) = f(x)$, maka $f(x) = x^2$ merupakan fungsi genap.

Dengan menggunakan Teorema 4, akan diperoleh:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 x^2 dx &= 2 \int_0^1 x^2 dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} (1^3 - 0^3)$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$\text{Jadi, } \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

3. Tentukanlah $\int_0^4 f(x) dx$ jika fungsi f didefinisikan sebagai

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{jika } 0 \leq x < 2 \\ 1, & \text{jika } x \geq 2 \end{cases}$$

Jawab:

$$\int_0^4 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx \quad (\text{Teorema 3})$$

$$= \int_0^2 (x+2) dx + \int_2^4 1 dx$$

$$= \left. \frac{1}{2}x^2 - 2x \right|_0^2 + x \Big|_2^4$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 \right) \right] + [4 - 2]$$

$$= 2 + 4 + 2$$

$$= 8$$

$$\text{Jadi, } \int_0^4 f(x) dx = 8.$$

Asah Kompetensi 3

1. Tentukanlah integral tertentu berikut ini!

a. $\int_1^5 2x dx$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4x+3+\cos x) dx$

c. $\int_{-100}^{100} x^5 dx$

d. $\int_0^2 (2x-1)^3 dx$

e. $\int_0^1 \frac{x^2 - 7x + 6}{x-1} dx$

f. $\int_0^5 (3x^2 - 5x) dx$

g. $\int_{-\pi}^{2\pi} (\cos x - \sin x) dx$

h. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos\left(3x + \frac{3}{4}\pi\right) dx$

2. Dari fungsi $f(x)$ berikut, hitunglah $\int_0^5 f(x) dx$

a. $f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{jika } 0 \leq x < 2 \\ 6 - x, & \text{jika } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2}, & \text{jika } -3 \leq x < 4 \\ 2, & \text{jika } 4 \leq x \leq 10 \end{cases}$

c. $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{9 - x^2}, & \text{jika } 0 \leq x \leq 3 \\ -5x, & \text{jika } x \geq 3 \end{cases}$



ASA H KEMAMPUAN

Waktu : 60 menit

1. Tentukanlah integral tertentu berikut!

Bobot soal: 80

a. $\int_{-1}^{-2} (4t - 6t^2) dt$

e. $\int_{-1}^0 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$

b. $\int_1^8 (x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{4}{3}}) dx$

f. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^3 2x \cos 2x) dx$

c. $\int_0^4 (2x+1)\sqrt{x+x^2} dx$

g. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1 - \cos x} dx$

d. $\int_{-1}^3 \frac{1}{(t+2)^2} dt$

h. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x dx$

2. Jika $\int_0^1 f(x) dx = 4$ dan $\int_0^1 g(x) dx = -2$, hitunglah integral-integral berikut!

Bobot soal: 10

a. $\int_0^1 3f(x) dx$

d. $\int_0^1 (2g(x) - 3f(x)) dx$

b. $\int_0^1 (f(x) - g(x)) dx$

e. $\int_1^0 (2f(x) - 3x^2) dx$

c. $\int_0^1 (3f(x) + 2g(x) + 2) dx$

3. Diketahui f merupakan fungsi ganjil dan g merupakan fungsi genap dengan $\int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 g(x) dx = 3$. Tentukanlah integral-integral berikut!

Bobot soal: 10

a. $\int_{-1}^1 f(x) dx$

b. $\int_{-1}^1 g(x) dx$

c. $\int_{-1}^1 |f(x)| dx$

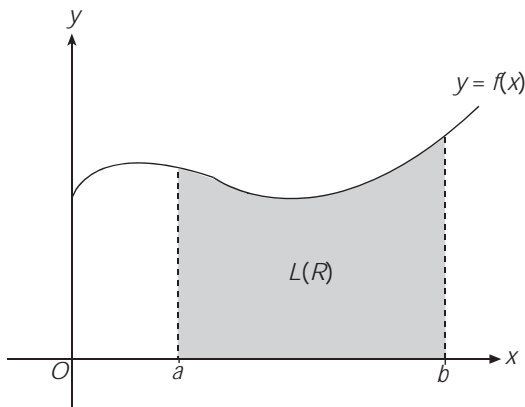
D. Menentukan Luas Daerah

D. 1. Menentukan Luas Daerah di Atas Sumbu- x

Pada subbab c kalian telah mengetahui bahwa luas merupakan limit suatu jumlah, yang kemudian dapat dinyatakan sebagai integral tertentu. Pada subbab ini, akan dikembangkan pemahaman untuk menentukan luas daerah yang dibatasi oleh beberapa kurva.

Misalkan R daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, sumbu- x , garis $x = a$, dan garis $x = b$, dengan $f(x) \geq 0$ pada $[a, b]$, maka luas daerah R adalah sebagai berikut.

$$L(R) = \int_a^b f(x) dx$$



Gambar 1.4
Luas daerah di atas sumbu- x

Contoh

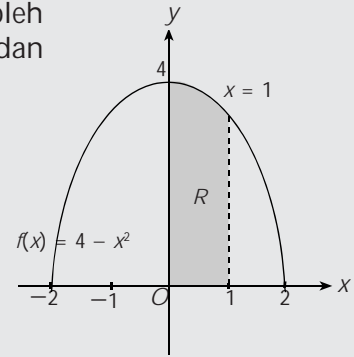
Tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $f(x) = 4 - x^2$, sumbu- x , garis $x = 0$, dan $x = 1$.

Jawab:

Daerah tersebut adalah daerah R . Luas daerah R adalah:

$$\begin{aligned} L(R) &= \int_0^1 (4 - x^2) dx \\ &= \left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 \\ &= \left(4 \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 0 \right) \\ &= 3\frac{2}{3} \end{aligned}$$

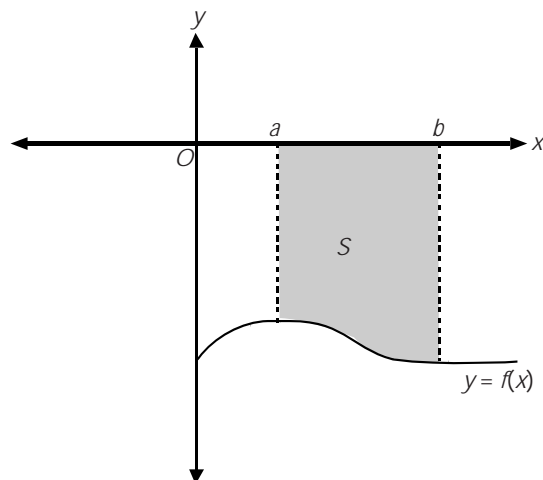
Jadi, luas daerah R adalah $3\frac{2}{3}$ satuan luas.



D. 2. Menentukan Luas Daerah di Bawah Sumbu- x

Misalnya S daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, sumbu- x , garis $x = a$, dan garis $x = b$, dengan $f(x) \leq 0$ pada $[a, b]$, seperti yang telah dibahas di subbab D.1, maka luas daerah S adalah

$$L(S) = - \int_a^b f(x) dx$$

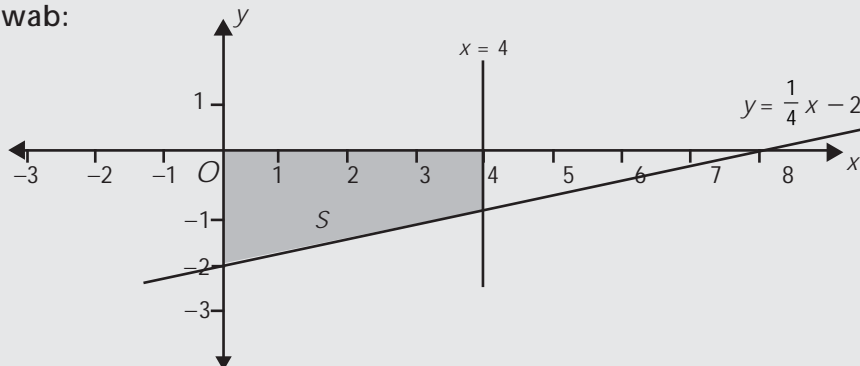


Gambar 1.5
Luas daerah di bawah sumbu x

Contoh

Tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh garis $y = \frac{1}{4}x - 2$, sumbu- x , garis $x = 4$, dan sumbu- y .

Jawab:



Daerah tersebut adalah daerah S . Luas Daerah S adalah

$$\begin{aligned} L(S) &= -\int_0^4 \left(\frac{1}{4}x - 2 \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{8}x^2 - 2x \right]_0^4 \\ &= -\left(\left(\frac{1}{8} \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 \right) - 0 \right) \\ &= -(2 - 8) = 6 \end{aligned}$$

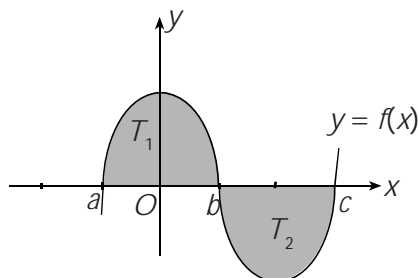
Jadi, luas daerah yang diarsir adalah 6 satuan.

D. 3. Menentukan Luas Daerah yang Terletak Dibatasi Kurva $y = f(x)$ dan sumbu- x

Misalkan T daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, sumbu- x , garis $x = a$, dan garis $x = c$, dengan $f(x) \geq 0$ pada $[a, b]$ dan $f(x) \leq 0$ pada $[b, c]$, maka luas daerah T adalah

$$L(T) = \int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx$$

Rumus ini didapat dengan membagi daerah T menjadi T_1 dan T_2 masing-masing pada interval $[a, b]$ dan $[b, c]$. Kalian dapat menentukan luas T_1 sebagai luas daerah yang terletak di atas sumbu- x dan luas T_2 sebagai luas daerah yang terletak di bawah sumbu- x .



Gambar 1.6

Luas daerah yang dibatasi kurva $y = f(x)$ dan sumbu- x

Contoh

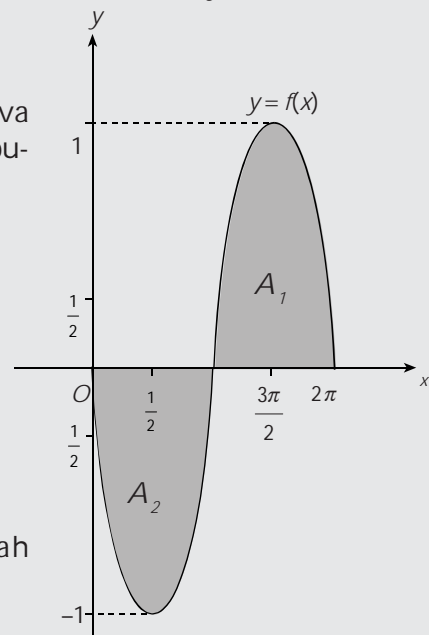
Tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x) = -\sin x$, $0 \leq x \leq 2\pi$, dan sumbu- x .

Jawab:

Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x) = -\sin x$, $0 \leq x \leq 2\pi$, dan sumbu- x adalah:

$$\begin{aligned} L &= L(A_1) + L(A_2) \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x \, dx - \int_0^{\pi} -\sin x \, dx \\ &= \left[\cos x \right]_{\pi}^{2\pi} - \left[\cos x \right]_0^{\pi} \\ &= (\cos 2\pi - \cos \pi) - (\cos \pi - \cos 0) \\ &= (1 - (-1)) - (-1 - 1) \\ &= 2 + 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

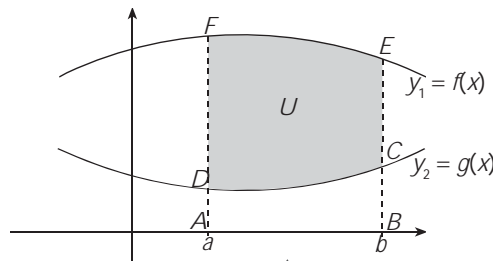
Jadi, luas daerah tersebut adalah 4 satuan luas.



D. 4. Menentukan Luas Daerah yang Terletak di Antara Dua Kurva

Luas daerah U pada gambar di bawah adalah

$$L(U) = \text{Luas } ABEF - \text{Luas } ABCD$$



Gambar 1.7

Luas daerah yang terletak di antara dua kurva

$ABEF$ adalah daerah yang dibatasi oleh kurva $y_1 = f(x)$, $x = a$, $x = b$, dan $y = 0$ sehingga

$$\text{Luas } ABEF = \int_a^b f(x) \, dx$$

Adapun $ABCD$ adalah daerah yang dibatasi oleh kurva $y_2 = g(x)$, $x = a$, $x = b$, dan $y = 0$ sehingga

$$\text{Luas } ABCD = \int_a^b g(x) \, dx$$

Dengan demikian, luas daerah U adalah

$$L(U) = \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx$$

Contoh

Tentukanlah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $f(x) = 4 - x^2$, garis $x = 0$, dan di atas garis $y = 1$.

Jawab:

Luas daerah yang dimaksud adalah luas daerah U .

Tentukanlah batas-batas pengintegralan, yaitu absis titik potong antara kurva $y = f(x) = 4 - x^2$ dan garis $y = 1$ di kuadran I.

Substitusi $y = 1$ ke persamaan $y = 4 - x^2$ sehingga didapat:

$$4 - x^2 = 1$$

$$x^2 = 3$$

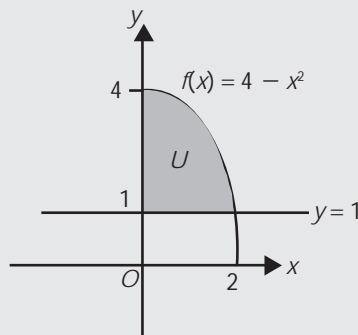
$$x_1 = -\sqrt{3} \text{ atau } x_2 = \sqrt{3}$$

Oleh karena daerah U ada di kuadran I, maka batas-batas pengintegralannya adalah $x = 0$ sampai $x = \sqrt{3}$.

Dengan demikian, luas daerah U adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} L(U) &= \int_0^{\sqrt{3}} (4 - x^2 - 1) dx \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} (3 - x^2) dx \\ &= \left[3x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= 3 \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{3} \cdot (\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3} - \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \\ &= 3 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Jadi, luas daerah U adalah $2\sqrt{3}$ satuan luas.



ASAH KEMAMPUAN

Waktu : 60 menit

1. Gambarkanlah daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva berikut. Kemudian, tentukan luas daerah tersebut!
 - a. $f(x) = 3x^2 - x^3$ dan sumbu- x .
 - b. $g(x) = 1 + x^3$, sumbu- x , dan garis $x = 2$
 - c. $h(x) = x^2 - 3x$, sumbu- x , $x = 0$, dan sumbu simetri parabola
 - d. $i(x) = x$, $g(x) = 2x$, dan $x = 5$
 - e. $j(x) = x^2 - 3x - 4$ dan sumbu garis $y = -4$
 - f. $k(x) = \sin x$ dan $g(x) = \cos x$, untuk $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Bobot soal: 60

2. Suatu daerah yang dibatasi oleh kurva $f(x) = x^2 - 2x - 8$ dan sumbu- x dibagi menjadi dua bagian oleh sumbu- y . Tentukan perbandingan luas bagian masing-masing!
3. Tentukan luas persegi panjang terbesar yang dapat dibuat dalam daerah yang dibatasi kurva $y = x^2$ dan garis $y = 4$.

Bobot soal: 20

Bobot soal: 20

Olimpiade Matematika SMU, 2000

Siapa Berani

Titik (a, b) dan $(-a, b)$ dengan a dan b bilangan real positif merupakan dua titik pada parabola $f(x) = 1 - x^2$. Jika kedua titik tersebut dengan titik $(1, 0)$ dan $(-1, 0)$ membentuk trapesium, tentukanlah luas terbesar trapesium tersebut!

Sumber : Olimpiade Matematika SMU, 2000

E. Menentukan Volume Benda Putar

E. 1. Menentukan Volume Benda Putar yang Diputar Mengelilingi Sumbu- x

Secara umum, volume dinyatakan sebagai luas alas dikali tinggi. Secara matematis, ditulis

$$V = A \cdot h$$

Kemudian, perhatikan sebuah benda yang bersifat bahwa penampang-penampang tegak lurus pada suatu garis tertentu memiliki luas tertentu. Misalnya, garis tersebut adalah sumbu- x dan andaikan luas penampang di x adalah $A(x)$ dengan $a \leq x \leq b$. Bagi selang $[a, b]$ dengan titik-titik bagi $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$.

Melalui titik-titik ini, luas bidang tegak lurus pada sumbu- x , sehingga diperoleh pemotongan benda menjadi lempengan yang tipis-tipis. Volume suatu lempengan ini dapat dianggap sebagai volume tabung, yaitu $\Delta V_i \approx A(\bar{x})\Delta x_i$ dengan $x_{i-1} \leq \bar{x}_i \leq x_i$.

Dengan jumlah yang kalian dapatkan $V \approx \sum_{i=1}^n A(\bar{x}_i)\Delta x_i$, kemudian akan

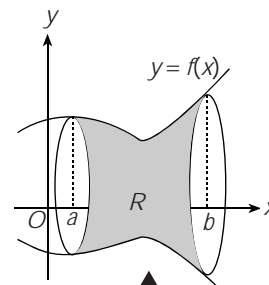
menjadi $V = \int_a^b A(x) dx$.

$A(x)$ adalah luas alas benda putar, oleh karena alas benda putar ini berupa lingkaran, maka $A(x) = \pi r^2$ jari-jari yang dimaksud merupakan sebuah fungsi dalam x_i , misalnya $f(x)$. Dengan demikian volume benda putar

dapat dinyatakan sebagai $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$.

Misalkan R daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi $f(x)$, sumbu- x , garis $x = a$, garis $x = b$, dengan $a < b$, maka volume benda putar yang diperoleh dengan memutar daerah R mengelilingi sumbu- x adalah

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

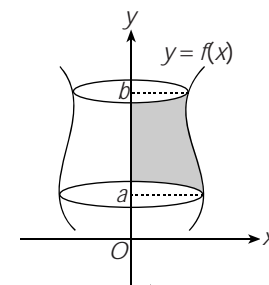


Gambar 1.8
Volume benda putar yang mengelilingi sumbu- x

E. 2. Menentukan Volume Benda Putar yang Diputar Mengelilingi Sumbu- y

Misalkan S daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi $x = f(y)$, sumbu- y , garis $x = a$, garis $x = b$, dengan $a < b$, maka volume benda putar yang diperoleh dengan memutar daerah S mengelilingi sumbu- y adalah V .

$$V = \pi \int_a^b (f(y))^2 dy$$

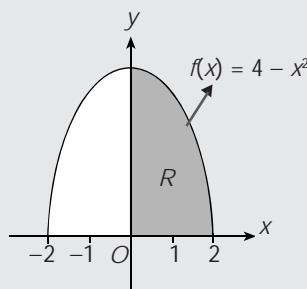


Gambar 1.9
Volume benda putar yang mengelilingi sumbu- y

Contoh

Tentukanlah volume benda putar, jika daerah yang dibatasi oleh grafik $f(x) = 4 - x^2$, sumbu- x , dan sumbu- y diputar 360° terhadap:

- sumbu- x
- sumbu- y



Jawab:

- Volumenya adalah:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 (4 - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (16 - 8x^2 + x^4) dx \\ &= \pi \left[16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right]_0^2 \\ &= \pi \left(\left(16 \cdot 2 - \frac{8}{3} \cdot 2^3 + \frac{1}{5} \cdot 2^5 \right) - 0 \right) \\ &= \pi \left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} \right) \\ &= \frac{256}{15} \pi \end{aligned}$$

Jadi, volume benda putar yang terjadi jika daerah R diputar mengelilingi sumbu- x adalah $\frac{256}{15} \pi$ satuan volume.

- Untuk menentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah R diputar mengelilingi sumbu- y , kalian harus nyatakan persamaan kurva $y = f(x) = 4 - x^2$ menjadi persamaan x^2 dalam variabel y .

$$y = 4 - x^2 \Rightarrow x^2 = 4 - y$$

Volume benda putar tersebut adalah

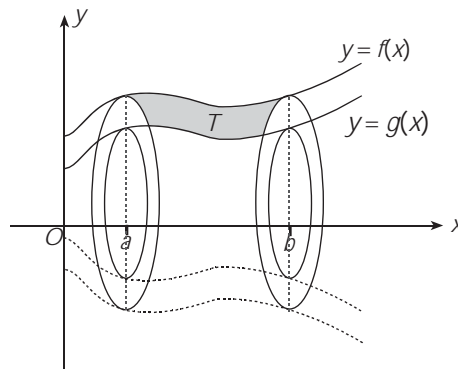
$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^4 (4-y) dy \\
 &= \pi \left[4y - \frac{1}{2}y^2 \right]_0^4 \\
 &= \pi \left(\left(4 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 4^2 \right) - 0 \right) \\
 &= \pi(16 - 8) = 8\pi
 \end{aligned}$$

Jadi, volume benda putar yang terjadi jika daerah R diputar mengelilingi sumbu- y adalah 8π satuan volume.

E. 3. Menentukan Volume Benda Putar yang Dibatasi Kurva $f(x)$ dan $g(x)$ jika Diputar Mengelilingi Sumbu- x

Daerah yang dibatasi oleh kurva $f(x)$ dan $g(x)$ dengan $|f(x)| \geq |g(x)|$ pada interval $[a, b]$ diputar mengelilingi sumbu- x seperti yang telah dijelaskan di subbab E.1, maka volume benda putar yang diperoleh adalah sebagai berikut.

$$V(T) = \pi \int_a^b (f(x))^2 - (g(x))^2 dx$$



Gambar 1.10

Volume benda putar yang dibatasi kurva $f(x)$ dan $g(x)$ jika diputar mengelilingi sumbu- x

Contoh

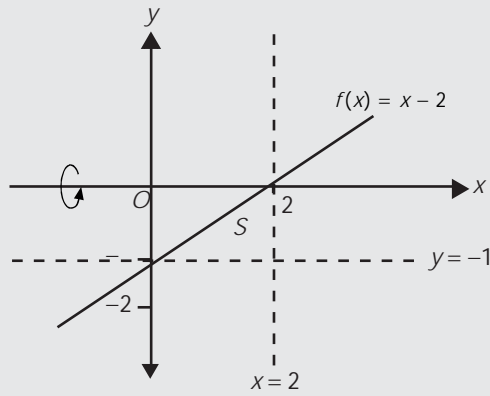
Tentukanlah volume benda putar, jika daerah yang dibatasi oleh grafik $f(x) = x - 2$, sumbu- y , garis $x = 2$, dan $y = -1$ diputar 360° mengelilingi sumbu- x

Jawab:

Karena daerah yang dimaksud ada di bawah sumbu- x , maka volumenya adalah

$$V = -\pi \int_0^2 ((-1)^2 - (x-2)^2) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= -\pi \int_0^2 1 - (x^2 - 4x + 4) dx \\
 &= -\pi \left(-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x \right) \Big|_0^2 \\
 &= -\pi \left[\left(-\frac{8}{3} + 8 - 6 \right) - 0 \right] \\
 &= \frac{2}{3}\pi
 \end{aligned}$$

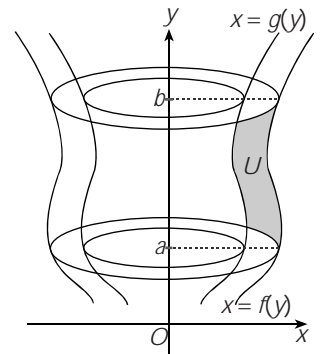


Jadi, volume benda putar yang terjadi jika daerah S diputar mengelilingi sumbu- x adalah $4\frac{1}{6}\pi$ satuan volume.

E.4. Menentukan Volume Benda Putar yang Dibatasi Kurva $f(y)$ dan $g(y)$ jika Diputar Mengelilingi Sumbu- y

Jika daerah yang dibatasi oleh kurva $f(y)$ dan $g(y)$ dengan $|f(y)| \geq |g(y)|$ pada interval $[a, b]$ diputar mengelilingi sumbu- y . Seperti yang telah dijelaskan di subbab E.1, maka volume benda putar yang diperoleh adalah sebagai berikut.

$$V(U) = \pi \int_a^b ((f(y))^2 - (g(y))^2) dy$$



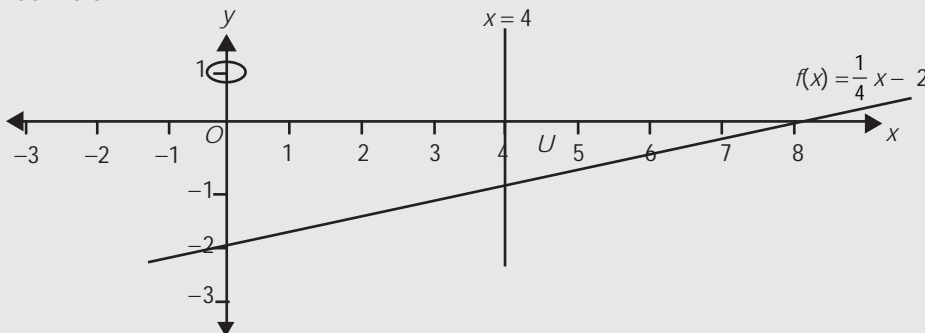
Gambar 1.11

Volume benda putar yang dibatasi kurva $f(y)$ dan $g(y)$ jika diputar mengelilingi sumbu- y

Contoh

Tentukanlah volume benda putar, jika daerah yang dibatasi oleh grafik $f(x) = \frac{1}{4}x - 2$, sumbu- x , garis $x = 0$, dan garis $x = 4$ diputar 360° mengelilingi sumbu- y .

Jawab:



Untuk menentukan volume benda putar tersebut, tentukan batas-batas pengintegralan, yaitu ordinat titik potong antara kurva

$$y = f(x) = \frac{1}{4}x - 2 \text{ dan garis } x = 4.$$

Substitusi $x = 4$ ke persamaan $y = \frac{1}{4}x - 2$ sehingga diperoleh,

$$y = f(x) = \frac{1}{4} \cdot 4 - 2 = -1$$

Jadi, batas-batas pengintegralannya adalah $y = -1$ sampai $y = 0$. Oleh karena daerah tersebut diputar mengelilingi sumbu- y , maka kalian harus menyatakan persamaan kurva $y = \frac{1}{4}x - 2$ menjadi persamaan x dalam variabel y .

$$\text{Dari } y = \frac{1}{4}x - 2$$

$$\frac{1}{4}x = y + 2$$

$$x = 4y + 8$$

Jadi, volume benda putar tersebut adalah

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^0 ((4y + 8)^2 - 4^2) dy + \pi \int_{-2}^{-1} (4y + 8)^2 dy \\ &= \pi \int_{-1}^0 (16y^2 + 64y + 48) dy + \pi \int_{-2}^{-1} (16y^2 + 64y + 64) dy \\ &= \pi \left(\frac{16}{3}y^3 + 32y^2 + 48y \right) \Big|_{-1}^0 + \pi \left(\frac{16}{3}y^3 + 32y^2 + 64y \right) \Big|_{-2}^{-1} \\ &= \pi \left[0 - \left(\frac{16}{3} \cdot (-1)^3 + 32(-1)^2 + 48(-1) \right) \right] + \\ &\quad \pi \left[\left(\frac{16}{3} \cdot (-1)^3 + 32(-1)^2 + 64(-1) \right) - \left(\frac{16}{3} \cdot (-2)^3 + 32(-2)^2 + 64(-2) \right) \right] \\ &= -\pi \left(-\frac{16}{3} - 16 \right) + \pi \left[\left(-\frac{16}{3} + 32 - 64 \right) - \left(\frac{16}{3} \cdot 8 + 128 - 128 \right) \right] \\ &= 21\frac{1}{3}\pi + \frac{16}{3}\pi = \frac{80}{3}\pi \end{aligned}$$

Dengan demikian, volume benda putar yang terjadi jika daerah U diputar mengelilingi sumbu- y adalah $\frac{80}{3}\pi$ satuan volume.



ASAH KEMAMPUAN

Waktu : 60 menit

Gambarlah daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva berikut ini. Kemudian, tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah tersebut diputar 360° mengelilingi sumbu- x dan volume jika diputar 360° mengelilingi sumbu- y .

- $y = -x$, sumbu- x , garis $x = 0$, dan garis $x = 6$
- $f(x) = \sin x$ pada interval $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$ dan sumbu- x
- $x^2 + y^2 = 64$, sumbu- x , dan sumbu- y

Bobot soal: 20

Bobot soal: 20

Bobot soal: 20

4. $y^2 = 10x$, $y^2 = 4x$, dan $x = 4$

EBTANAS 1989

Bobot soal: 20

5. $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + 2$, $g(x) = 2 - x$, dan $x = 2$

Bobot soal: 20

Rangkuman

1. Bentuk umum integral tak tentu

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

dengan

- $\int dx$: Lambang integral yang menyatakan operasi antiturunan
- $f(x)$: Fungsi integran, yaitu fungsi yang dicari antiturunannya
- c : Konstanta

2. Rumus integral tak tentu

- $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$, di mana c adalah konstanta, $n \neq -1$
- $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$
- $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
- $\int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$
- $\int (u(x))^r u'(x) dx = \frac{1}{r+1}(u(x))^{r+1} + c$, di mana c adalah konstanta, $n \neq -1$
- $\int u dv = uv - \int v du$
- $\int \cos x dx = \sin x + c$, di mana c adalah konstanta
- $\int \sin x dx = -\cos x + c$, di mana c adalah konstanta
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + c$, di mana c adalah konstanta

3. Bentuk umum integral tertentu

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

di mana f kontinu pada interval $[a, b]$

4. Rumus-rumus integral tertentu

- $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$

- $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
- $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$
- $\int_a^a f(x) dx = 0$
- $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$
- $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$
- $\int_{-a}^a f(x) dx = 2\int_0^a f(x) dx$ di mana f fungsi genap
- $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ di mana f fungsi ganjil

5. Rumus luas daerah (L) yang terletak

a. di atas sumbu- x

$$L(R) = \int_a^b f(x) dx$$

b. di bawah sumbu- x

$$L(S) = -\int_a^b f(x) dx$$

c. di atas dan di bawah sumbu- x

$$L(T) = \int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx$$

d. di antara dua kurva

$$L(U) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

6. Volume benda putar (V) yang diputar mengelilingi

a. sumbu- x

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

b. sumbu- y

$$V = \pi \int_a^b (f(y))^2 dy$$

c. sumbu- x dan dibatasi kurva $f(x)$ dan $g(x)$

$$V = \pi \int_a^b ((f(x))^2 - g(x))^2 dx$$

d. sumbu- y dan dibatasi kurva $f(y)$ dan $g(y)$

$$V = \pi \int_a^b ((f(y))^2 - g(y))^2 dy$$

9. Panjang busur kurva $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ dari $x = 0$ sampai $x = 8$ adalah

- A. $18\frac{2}{3}$ D. 16
 B. 18 E. $14\frac{2}{3}$
 C. $16\frac{2}{3}$

10. Luas daerah yang dibatasi oleh sumbu- y , kurva $y = x^2 + 1$, dan kurva $y = -x^2 + 19$ adalah

- A. 3 D. 60
 B. 36 E. 72
 C. 54

II. Jawablah pertanyaan berikut dengan jelas dan tepat!

1. Proporsi dari pekerja yang mendapatkan upah antara a ribu dan b ribu rupiah/hari adalah $y = \frac{(-x^2 + 6x)}{36}$ dan dibatasi sumbu- x . Terletak di antara a dan b yang bernilai 0 dan 6. Berapakah persentase pekerja yang mendapatkan upah di bawah Rp1.500,00?

2. Sebuah benda bergerak dengan laju v m/det. Pada saat $t = 2$ detik posisi benda berada pada jarak 30 m dari titik asal. Tentukanlah posisi benda sebagai fungsi waktu t !

3. Sebuah bola bergulir pada sebuah bidang datar dengan laju awal 4 m/det. Akibat gesekan dengan bidang itu, bola mengalami perlambatan 2 m/det². Jika pada saat $t = 0$ posisi benda berada pada $s = 0$, berapa

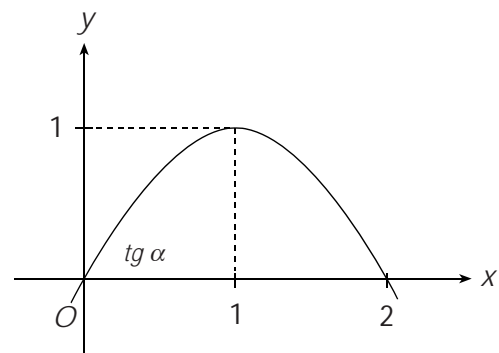
jauhkah jarak yang ditempuh bola dari awal sampai berhenti?

4. Ayu dan Bernard berangkat dari tempat yang sama pada saat $t = 0$. Kecepatan pada waktu t adalah $v(t)$ dan jarak yang dijalan

antara $t = a$ dan $t = b$ adalah $\int_a^b v(t) dt$.

Kecepatan Ayu seperti kurva yang terlihat pada gambar di bawah ini. Jika $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Berapakah jarak yang ditempuh mereka masing-masing pada saat kecepatannya sama?



5. Sekelompok bakteri dalam suatu lingkungan hidup tertentu berkembang biak sesuai

dengan perumusan $\frac{dn}{dt} = 0,5 N$. Jika jumlah bakteri pada keadaan awal adalah 200, hitunglah jumlah bakteri setelah $t = 2$ detik, $t = 4$ detik, $t = 8$ detik, $t = 10$ detik!

(Petunjuk: Nyatakan hasil perhitungan dalam $e = 2, 71828 \dots$)