

TURUNAN FUNGSI

(y' atau f'(x) atau $\frac{dy}{dx}$)

Hal-hal yang perlu diingat untuk menyelesaikan turunan fungsi aljabar adalah :

1. $(a+b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2)$

2. $(a-b)^2 = (a^2 - 2ab + b^2)$

3. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

4. $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$

5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

6. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

7. $a^m : a^n = a^{m-n}$

8. $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

9. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

10. $a^0 = 1$, dengan $a \neq 0$

11. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

A. Turunan Fungsi Aljabar

Rumus turunan fungsi aljabar

1. $f(x) = ax^n$

$$f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$$

2. $f(x) = a \cdot x$

$$f'(x) = a$$

3. $f(x) = a$

$$f'(x) = 0$$

Rumus turunan fungsi aljabar bentuk sederhana

4. $f(x) = u \cdot v$

$$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$5. f(x) = \frac{u}{v}$$

$$f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Contoh :

1. Tentukan turunan dari $f(x) = 2x^3 + 3x - 4$!
2. Tentukan turunan dari $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$!
3. Tentukan turunan dari $f(x) = (x - 2)^2$!
4. Tentukan turunan pertama fungsi $f(x) = (2x - 1)(x + 2)$!
5. Tentukan turunan pertama fungsi $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x}$!

Penyelesaian :

1. Diketahui $f(x) = 2x^3 + 3x - 4$!

Jawab :

$$f(x) = 2x^3 + 3x - 4$$

$$f'(x) = 2 \cdot 3x^{3-1} + 3 \cdot 1x^{1-1} - 0$$

$$f'(x) = 6x^2 + 3$$

2. Diketahui $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$!

Jawab :

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = \left(\frac{3}{2} \cdot 1\right) x^{\left(\frac{3}{2}-1\right)}$$

$$f'(x) = \left(\frac{3}{2}\right) x^{\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{2}\right)}$$

$$f'(x) = \left(\frac{3}{2}\right) x^{\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2} \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

3. Diketahui $f(x) = (x - 2)^2$!

Jawab :

$$f(x) = (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

$$f(x) = x^2 - 4x + 4$$

$$f'(x) = 2x^{2-1} - 4x^{1-1} + 0$$

$$f'(x) = 2x - 4$$

4. Diketahui $f(x) = (2x - 1)(x + 2)$!

Jawab :

$$f(x) = (2x - 1)(x + 2)$$

$$\text{Misal : } \quad u = (2x - 1) \quad \rightarrow u' = 2$$

$$v = (x + 2) \quad \rightarrow v' = 1$$

Maka :

$$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$f'(x) = 2 \cdot (x + 2) + (2x - 1) \cdot 1$$

$$f'(x) = (2x + 4) + (2x - 1)$$

$$f'(x) = (4x + 3)$$

5. Diketahui $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x}$!

Jawab :

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x} !$$

$$\text{Misal : } \quad u = x^2 + 2x \quad \rightarrow u' = 2x + 2$$

$$v = x \quad \rightarrow v' = 1$$

Maka :

$$f'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+2) \cdot x - (x^2+2x) \cdot 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x^2+2x) - (x^2+2x)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+0}{x^2}$$

$$f'(x) = 1$$

B. Turunan Fungsi Trigonometri

Rumus fungsi trigonometri :

$$1. \frac{d}{dx} [\cos x] = -\sin x$$

$$2. \frac{d}{dx} [\sin x] = \cos x$$

$$3. \frac{d}{dx} [\tan x] = \sec^2 x$$

Rumus-rumus yang lain :

$$4. \frac{d}{dx} [\operatorname{ctg} x] = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$5. \frac{d}{dx} [\sec x] = \sec x \cdot \tan x$$

$$6. \frac{d}{dx} [\operatorname{cosec} x] = -\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{ctg} x$$

$$7. \frac{d}{dx} [\sin(ax+b)] = a \cos(ax+b)$$

$$8. \frac{d}{dx} [\cos(ax+b)] = -a \sin(ax+b)$$

$$9. \frac{d}{dx} [\tan(ax+b)] = a \sec^2 x(ax+b)$$

Contoh :

Tentukan turunan fungsi berikut :

1. $f(x) = 2x + \sin x$

2. $y = 3 + \cos x$

3. $f(x) = 2 \sin x + 4 \cos x$

4. $f(x) = x \cdot \sin x$

5. $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

Jawab :

1. Diketahui $f(x) = 2x + \sin x$

Jawab :

$$f(x) = 2x + \sin x$$

$$f'(x) = 2 + \cos x$$

2. Diketahui $y = 3 + \cos x$

Jawab :

$$y = 3 + \cos x$$

$$y' = 0 + (-\sin x)$$

$$y' = -\sin x$$

3. Diketahui $f(x) = 2 \sin x + 4 \cos x$

Jawab :

$$f(x) = 2 \sin x + 4 \cos x$$

$$f'(x) = 2 (\cos x) + 4 (-\sin x)$$

$$f'(x) = 2 \cos x - 4 \sin x$$

4. Diketahui $f(x) = x \cdot \sin x$

Jawab :

$$f(x) = x \cdot \sin x$$

Misal : $u = x \quad \rightarrow u' = 1$

$$v = \sin x \quad \rightarrow v' = \cos x$$

Maka :

$$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$f'(x) = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x$$

$$f'(x) = \sin x + x \cos x$$

5. Diketahui $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

Jawab :

$$f(x) = \sin x \cdot \cos x$$

$$\text{Misal : } \quad u = \sin x \quad \rightarrow u' = \cos x$$

$$v = \cos x \quad \rightarrow v' = -\sin x$$

Maka :

$$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$f'(x) = \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot -\sin x$$

$$f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

C. Aturan dalil rantai untuk mencari turunan fungsi ($y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

Contoh :

1. Tentukan turunan pertama fungsi $y = (2x^2 + 3x)^5$

Jawab :

$$y = (2x^2 + 3x)^5$$

$$\text{Misal : } \quad u = 2x^2 + 3x \quad \rightarrow \frac{du}{dx} = 4x + 3$$

$$y = u^5 \quad \rightarrow \frac{dy}{du} = 5u^4$$

Maka :

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y' = 5u^4 \cdot (4x + 3)$$

$$y' = 5(2x^2 + 3x)^4 \cdot (4x + 3)$$

$$y' = (2x^2 + 3x)^4 \cdot (20x + 15)$$

$$y' = (20x + 15) (2x^2 + 3x)^4$$

2. Tentukan turunan pertama fungsi $y = (4x + 5)^3$!

Jawab :

$$y = (4x + 5)^3$$

$$y' = 3 \cdot (4x + 5)^{3-1} \cdot 4$$

$$y' = 12 (4x + 5)^2$$

3. Tentukan turunan pertama fungsi $f(x) = \sqrt{(x^2 + 3)^3}$!

Jawab :

$$f(x) = \sqrt{(x^2 + 3)^3} = (x^2 + 3)^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2} \cdot (x^2 + 3)^{\frac{3}{2}-1} \cdot 2x = 3x(x^2 + 3)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 3x\sqrt{(x^2 + 3)}$$

D. Interval naik dan turun

Untuk menentukan interval fungsi $f(x)$ naik atau turun adalah :

1. Jika $f'(x) > 0 \rightarrow$ fungsi f naik
2. Jika $f'(x) < 0 \rightarrow$ fungsi f turun
3. Jika $f'(x) = 0 \rightarrow$ fungsi f tidak naik dan tidak turun (stationer)

Contoh :

Tentukan interval $f(x)$ naik, turun, dan koordinat titik stationer dari

$$f(x) = 2 + x^2 - \frac{1}{3}x^3.$$

Jawab :

$$f(x) = 2 + x^2 - \frac{1}{3}x^3 \rightarrow f'(x) = 2x - x^2$$

✍ $f(x)$ naik jika $f'(x) > 0$

$$2x - x^2 > 0$$

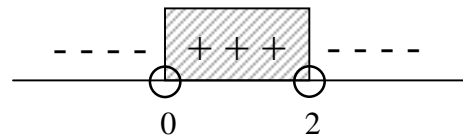
$$x(2 - x) > 0$$

Harga nol :

$$x = 0 \text{ atau } 2 - x = 0$$

$$x = 2$$

Jadi, $f(x)$ naik pada interval : $0 < x < 2$



✍ $f(x)$ turun jika $f'(x) < 0$

$$2x - x^2 < 0$$

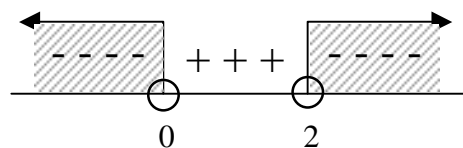
$$x(2 - x) < 0$$

Harga nol :

$$x = 0 \text{ atau } 2 - x = 0$$

$$x = 2$$

Jadi, $f(x)$ turun pada interval : $x < 0$ atau $x > 2$



✍ $f(x)$ stationer jika $f'(x) = 0$

$$2x - x^2 = 0$$

$$x(2 - x) = 0$$

Harga nol :

$$x = 0 \text{ atau } x = 2$$

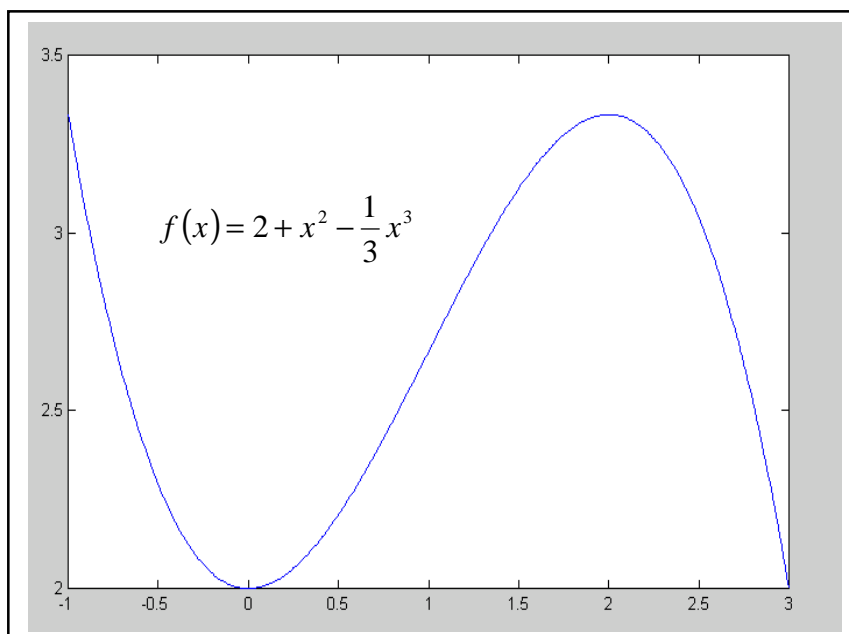
$$\text{Untuk } x = 0 \text{ maka nilai } y = 2 + x^2 - \frac{1}{3}x^3 \rightarrow y = 2 + 0^2 - \frac{1}{3}0^3$$

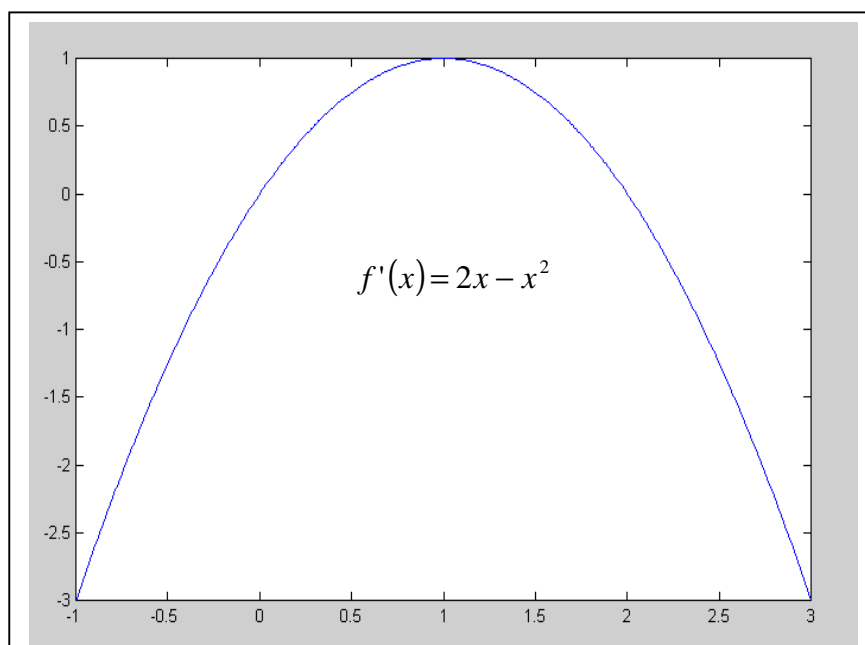
$$y = 2$$

$$\text{Untuk } x = 2 \text{ maka nilai } y = 2 + x^2 - \frac{1}{3}x^3 \rightarrow y = 2 + 2^2 - \frac{1}{3}2^3$$

$$y = \frac{10}{3}$$

Jadi koordinat titik stationernya $(0, 2)$ dan $(2, \frac{10}{3})$.





E. Menggambar grafik fungsi aljabar

Cara menggambar grafik fungsi aljabar suku banyak adalah sebagai berikut:

1. Tentukan titik potong dengan sumbu koordinat.
2. Tentukan titik-titik stationer dan jenis-jenisnya.
3. Tentukan beberapa titik pada kurva untuk memperhalus gambar.
4. Gambarlah kurva berdasarkan hasil pada point 1, 2 dan 3 diatas.

Contoh :

Gambar grafik $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 12x - 5$!

Jawab :

Langkah 1 : Menentukan titik potong dengan sumbu koordinat.

- a. titik potong dengan sumbu X, diperoleh jika $y = 0$

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 12x - 5 = 0$$

dalam hal ini titik potong dengan sumbu X sukar ditentukan.

b. titik potong dengan sumbu Y, diperoleh jika $x = 0$

$$y = \frac{1}{3}0^3 - \frac{7}{2}0^2 + 12 \cdot 0 - 5 = -5$$

titik potong dengan sumbu Y adalah $(0, -5)$

Langkah 2 : Menentukan titik stationer dan jenisnya.

Dari $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 12x - 5$ maka $f'(x) = x^2 - 7x + 12$.

Nilai stationer dicapai jika $f'(x) = 0$, sehingga :

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 3 \text{ atau } x_2 = 4$$

Nilai-nilai stationernya :

$$\text{Untuk } x_1 = 3 \text{ maka } f(3) = \frac{1}{3}3^3 - \frac{7}{2}3^2 + 12 \cdot 3 - 5 = 8\frac{1}{2}$$

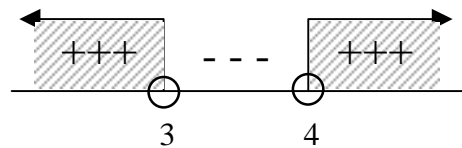
$$\text{Untuk } x_2 = 4 \text{ maka } f(4) = \frac{1}{3}4^3 - \frac{7}{2}4^2 + 12 \cdot 4 - 5 = 8\frac{1}{3}$$

$f(x)$ naik jika $f'(x) > 0$, maka :

$$x^2 - 7x + 12 > 0$$

$$(x-3)(x-4) > 0$$

$$x < 3 \text{ atau } x > 4$$

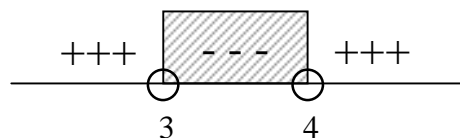


$f(x)$ turun jika $f'(x) < 0$, maka :

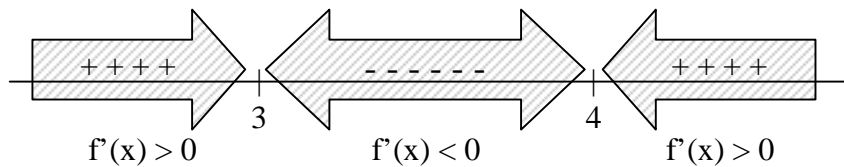
$$x^2 - 7x + 12 < 0$$

$$(x-3)(x-4) < 0$$

$$3 < x < 4$$



Tanda-tanda $f'(x)$ disekitar $x = 3$ dan $x = 4$



Berdasarkan bagan diatas maka :

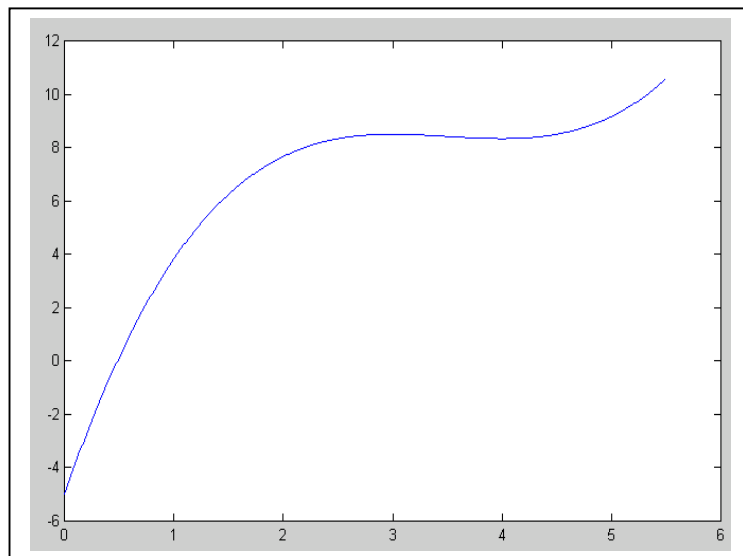
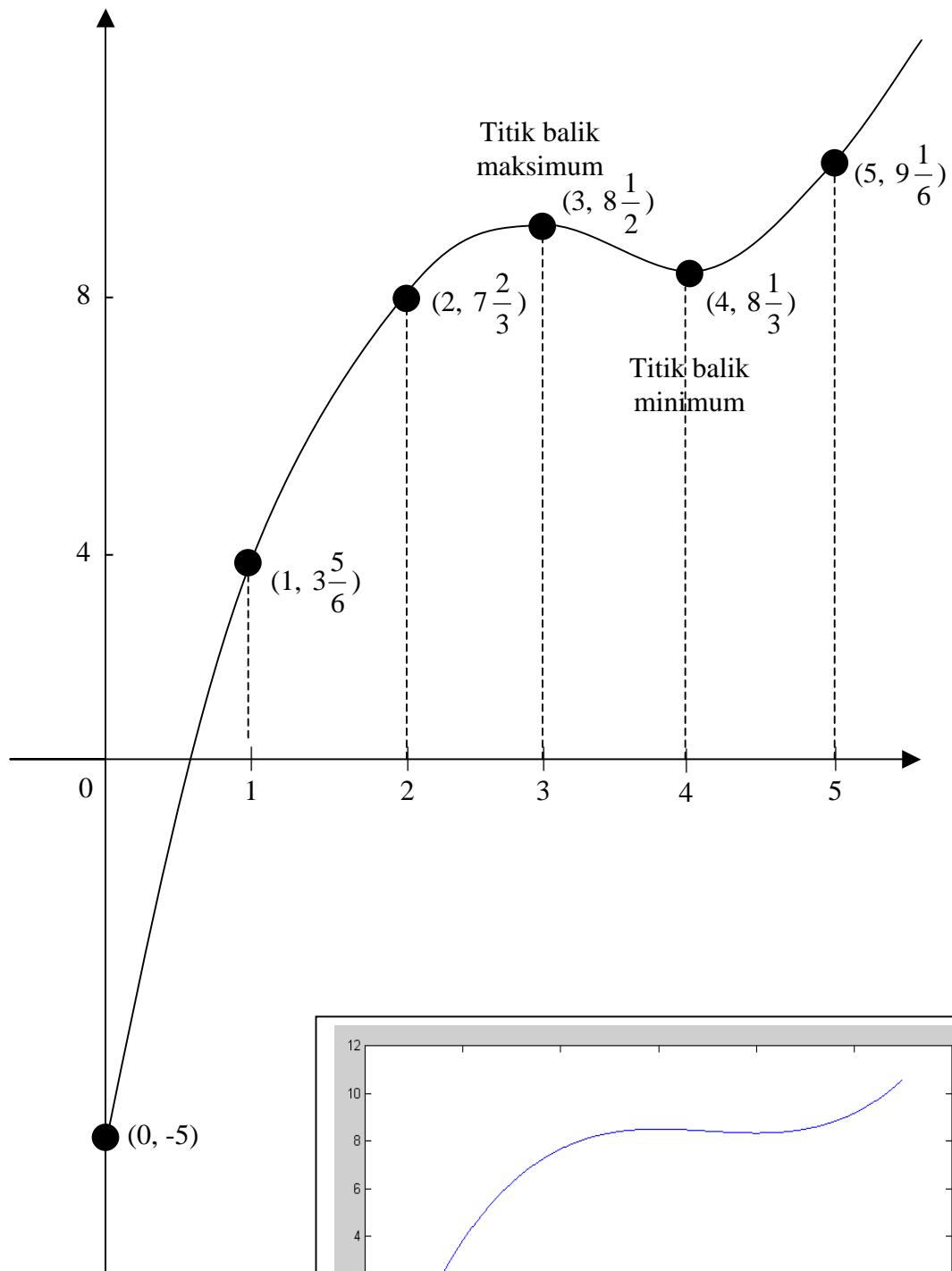
✍ $f(3) = 8\frac{1}{2}$ merupakan nilai balik maksimum, sebab $f'(x)$ berubah tanda dari positif menjadi negatif.

✍ $f(4) = 8\frac{1}{3}$ merupakan nilai balik minimum, sebab $f'(x)$ berubah tanda dari negatif menjadi positif.

Langkah 3 : Ambil beberapa titik tertentu untuk memperhalus kurva

x	1	2	3	4	5
f(x)	$3\frac{5}{6}$	$7\frac{2}{3}$	$8\frac{1}{2}$	$8\frac{1}{3}$	$9\frac{1}{6}$

Langkah 4 : Beberapa titik yang diperoleh dari langkah-langkah diatas digambar pada bidang cartesius, sehingga diperoleh grafik yang diminta.



F. Menentukan Nilai Stationer

Misalkan $y = f(x)$ maka turunan keduanya adalah $y'' = f''(x)$.

✍ Jika $y'' < 0$, maka kurva f cekung (terbuka) ke bawah.

✍ Jika $y'' > 0$, maka kurva f cekung (terbuka) ke atas.

Contoh :

Tentukan interval dimana grafik $y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 - x + 13$

a. cekung ke atas

b. cekung ke bawah

Jawab :

$$y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 - x + 13$$

$$y' = 8x^3 - 6x - 1$$

$$y'' = 24x^2 - 6 = 6(4x^2 - 1)$$

a. y cekung ke atas jika $y'' > 0$,

$$6(4x^2 - 1) > 0$$

$$6(2x + 1)(2x - 1) > 0$$

$$x < -\frac{1}{2} \text{ atau } x > \frac{1}{2}$$

Jadi kurva f cekung ke atas pada interval $x < -\frac{1}{2}$ atau $x > \frac{1}{2}$.

b. y cekung ke bawah jika $y'' < 0$,

$$6(4x^2 - 1) < 0$$

$$6(2x + 1)(2x - 1) < 0$$

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

Jadi kurva f cekung ke bawah pada interval $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

Misalkan $f'(a) = 0$:

✍ Jika $f''(a) < 0$, maka $f(a)$ merupakan nilai balik maksimum fungsi f .

✍ Jika $f''(a) > 0$, maka $f(a)$ merupakan nilai balik minimum fungsi f .

✍ Jika $f''(a) = 0$, maka nilai stationer fungsi f tidak dapat ditentukan.

Contoh :

Tentukan nilai-nilai stationer fungsi $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

Jawab :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f''(x) = 6x - 12$$

Titik-titik stationer diperoleh jika $f'(x) = 0$, maka :

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

$$x = 1 \text{ atau } x = 3$$

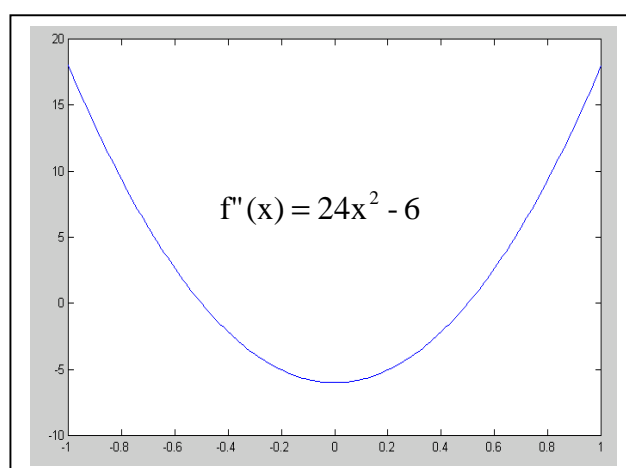
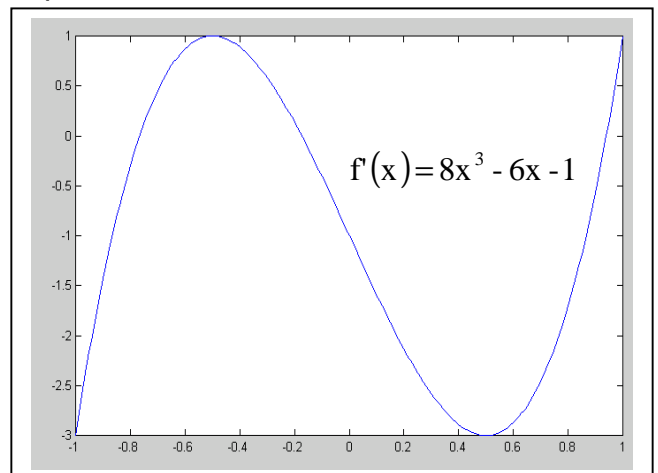
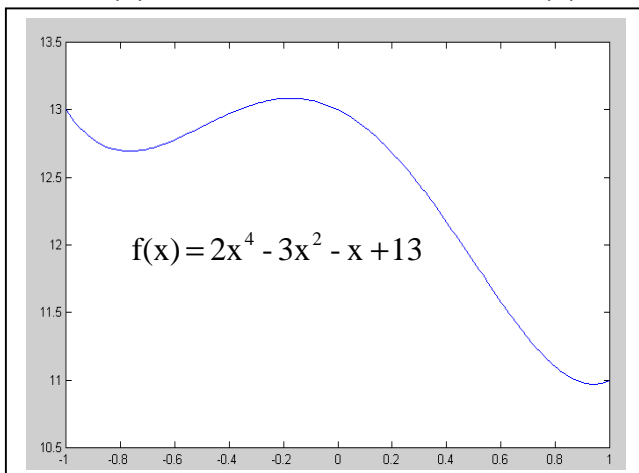
Untuk $x = 1$, maka $f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 1 = 5$

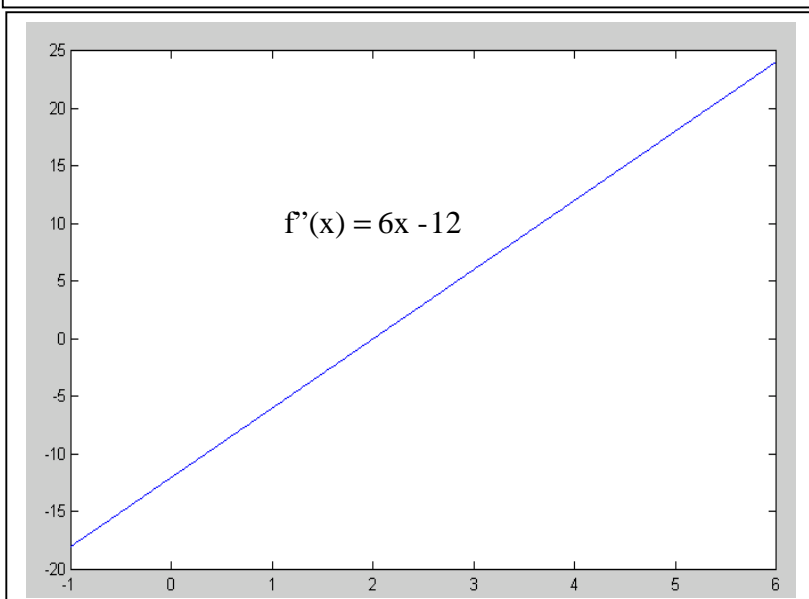
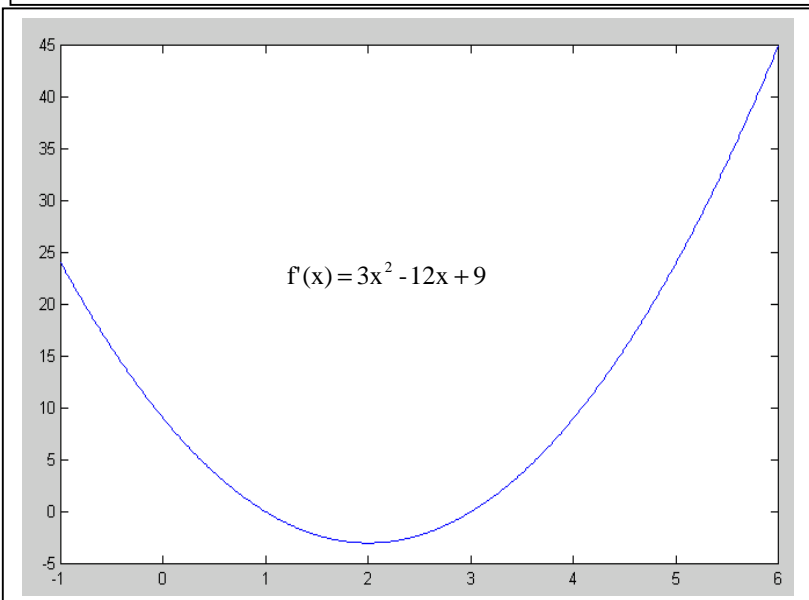
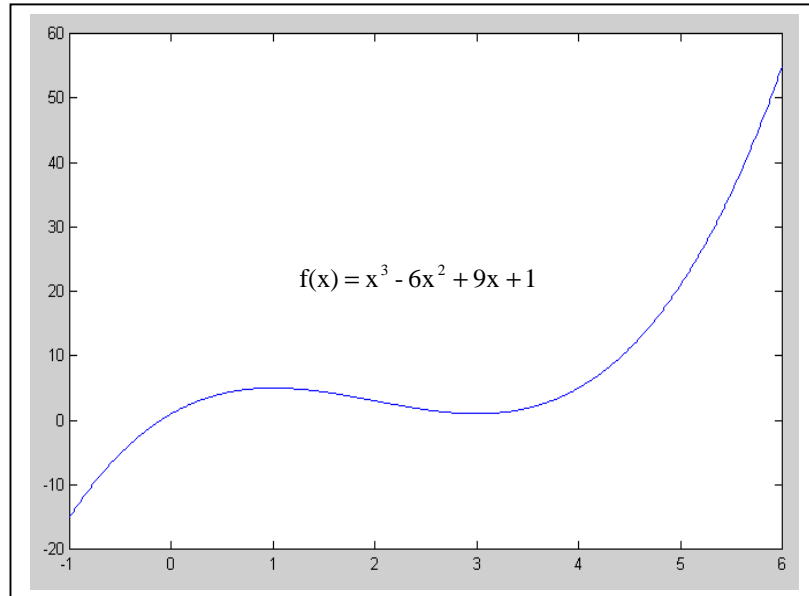
Untuk $x = 3$, maka $f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 1 = 1$

Jadi nilai-nilai stationer $f(x)$ adalah 5 dan 1.

$f''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = -6 < 0$, maka $f(1) = 5$ merupakan nilai balik maksimum.

$f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 6 > 0$, maka $f(3) = 1$ merupakan nilai balik minimum.





G. Gradien dan Persamaan Garis Singgung pada Kurva

Gradien garis singgung pada kurva $y = f(x)$ di $x = a$ adalah :

$$\begin{aligned} m &= f'(a) \\ &= \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

Contoh :

1. Tentukan gradien dari kurva $y = x^2 - 4x + 1$ dititik $(3, -2)$!
2. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = x^2 - 3x + 3$ dititik $(2, 1)$!

Jawab :

1. $y = x^2 - 4x + 1$

$$y' = 2x - 4$$

titik $(3, -2) \rightarrow (x, y)$

maka gradiennya adalah

$$m = y'$$

$$m = 2x - 4$$

$$m = 2 \cdot 3 - 4$$

$$m = 6 - 4 = 2$$

2. $y = x^2 - 3x + 3$

$$y' = 2x - 3$$

titik $(2, 1) \rightarrow (x, y)$

maka gradiennya adalah

$$m = y'$$

$$m = 2x - 3$$

$$m = 2 \cdot 2 - 3 = 1$$

Persamaan garis singgung melalui $(2, 1)$ dengan $m = 1$ adalah

$$(y - y_1) = m (x - x_1)$$

$$(y - 1) = 1 \cdot (x - 2)$$

$$y - 1 = x - 2$$

$$y = x - 1$$

SOAL LATIHAN TURUNAN

1. $y = x^2 - 5x + 6$

$$y' = ?$$

2. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

$$f'(2) = ?$$

3. $f(x) = 2x\sqrt{x} + x$

$$f'(x) = ?$$

4. $f(x) = x\sqrt{x} + x^3\sqrt{x} + x$

$$f'(x) = ?$$

5. $y = \frac{3}{x^4}$

$$y' = ?$$

6. $f(x) = x\sqrt{x}$

$$f'(x) = ?$$

7. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

$$f'(x) = ?$$

8. $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} + 8\sqrt[4]{x^5}$

$$f'(1) = ?$$

9. $f(x) = (2x^3 - 5)(x^5 + 2)$

$$f'(x) = ?$$

10. $f(x) = 3x^2 + x - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$

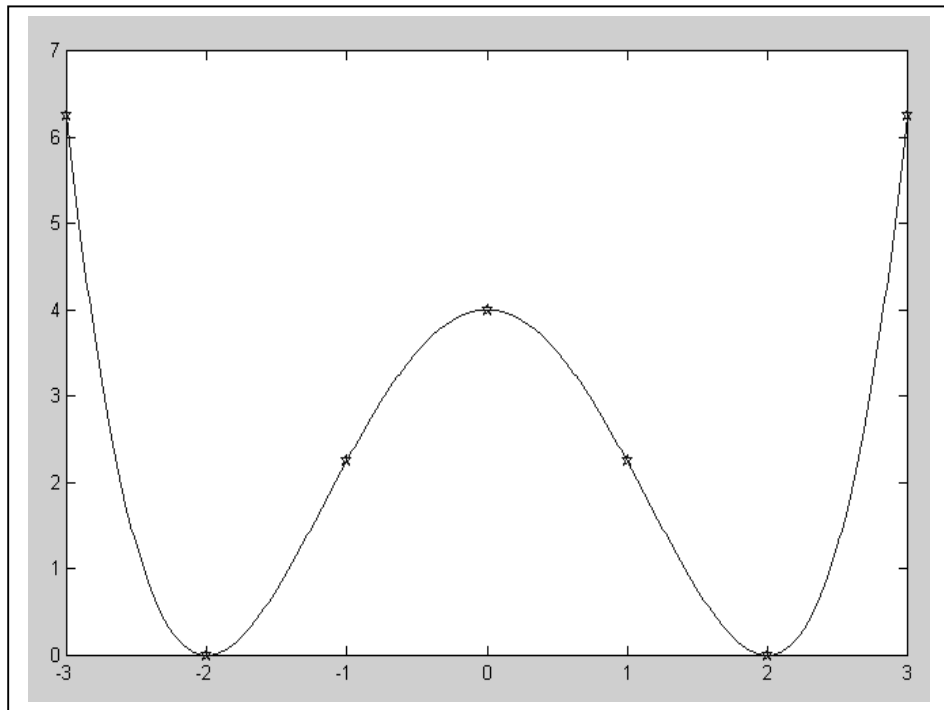
$$f'(x) = ?$$

11. $y = \frac{-2x + 3x^2}{x^2 + 3x}$

$$\frac{dy}{dx} = ?$$

12. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$
 $y' = ?$
13. Suatu fungsi ditentukan dengan $f(x) = ax^2 + bx + c$. Jika $f(1) = 6$,
 $f'(0) = 2$ dan $f'(1) = 4$.
Tentukan a, b dan c ?
14. $f(x) = x \cdot \cos x$
 $f'(x) = ?$
15. $f(x) = 4 + 3 \sin x$
 $f'(x) = ?$
16. $f(x) = 4 \cdot \tan x$
 $f'(x) = ?$
17. $f(x) = \sin (2x^2 - x)$
 $f'(x) = ?$
18. $f(x) = \cos x \cdot (\sin x + 1)$
 $f'(x) = ?$
19. $f(x) = x^2 + \frac{2}{x} + \sin x$
 $f'(x) = ?$
20. $y = x^3 \cdot \sin x$
 $\frac{dy}{dx} = ?$
21. $f(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$
 $f'(x) = ?$
22. Persamaan garis singgung $y = 2x^2 + 3x + 1$ pada titik (1, 6)
adalah ...
23. Persamaan garis singgung $y = 5x^2 + 2x - 12$ pada titik (12, 2)
adalah ...

24. Gambar grafik fungsi $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 4$ adalah ...



25. Gambar grafik fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ adalah ...

