HUBUNGAN ANTARA TURUNAN PARSIAL DAN KEKONTINUAN FUNGSI DENGAN DUA PEUBAH

IRYANTO

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Sumatera Utara

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan mengungkapkan hubungan turunan parsial pertama dengan kekontinuan fungsi dengan dua peubah di suatu titik tertentu. Pengamatan dilakukan terhadap fungsi-fungsi dengan dua peubah yang mempunyai masalah kritis di suatu titik tertentu. Dengan meng- gunakan defenisi kekontinuan dan defenisi turunan parsial fungsi dengan dua peubah, diteliti hubungan kekontinuannya dengan turunan parsialnya di titik tersebut. Kesimpulan dari penelitian ini adalah, bahwa terdapat fungsi dengan dua peubah yang kontinu di suatu titik tertentu tetapi tidak mempunyai turunan parsial pertama di titik tersebut. Ada pula fungsi yang tidak kontinu di suatu titik tertentu tetapi mempunyai turunan parsial dan turunan parsialnya ini tidak kontinu di titik tersebut. Selanjutnya terdapat fungsi dengan dua peubah yang kontinu dan mempunyai turunan parsial di suatu titik tertentu tetapi turunan parsialnya tidak kontinu di titik tersebut.

Bab I
PENDAHULUAN

A. LATAR BELAKANG

Kalkulus Diferensial dan Integral sangat luas penggunaannya dalam berbagai bidang seperti penentuan maksimum dan minimum suatu fungsi yang sering digunakan mahasiswa fakultas ekonomi dalam menentukan biaya optimum produksi dan penentuan keuntungan maksimum atau menentukan panjang maksimum suatu balok oleh mahasiswa fakultas teknik, dan sebagainya.

Dewasa ini telah cukup banyak buku - buku tentang kalkulus Diferensial dan Integral, baik yang menggunakan bahasa Indonesia maupun dalam bahasa asing terutama bahasa Inggris. Buku buku Kalkulus Diferensial dan Integral tersebut pada umumnya memuat defenisi – defenisi tentang turunan parsial dan kekontinuan suatu fungsi baik untuk satu peubah maupun untuk peubah banyak.

Defenisi dan rumus-rumus yang disajikan pada buku-buku Kalkulus Diferensial dan Integral tetsebut pada umumnya tidaklah berbeda, dan kalaupun ada perbedaannya hanya terletak pada cara penulisannya saja.

Defenisi-defenisi yang ada pada buku-buku tersebut khususnya dalam turunan parsial dan kekontinuan suatu fungsi tidak menunjukkan adanya hal-hal yang khusus dimana defenisi tersebut tidak berlaku. Karena itu peneliti merasa tertarik untuk mengadakan suatu penelitian dalam Kalkukus Diferensial dan Integral khususnya tentang turunan parsial dan kekontinuan fungsi dengan dua peubah. Peneliti ingin mengetahui apakah ada hubungan antara turunan parsial dengan kekontinuan suatu fungsi di suatu titik tertentu melalui contoh-contoh penyanggah.

B. TINJAUAN PUSTAKA

Penelitian ini didukung oleh berbagai pemikiran dan rujukan seperti yang terdapat di dalam beberapa bahan bacaan antara lain:

Watson Fulks, di dalam bukunya berjudul Advanced Calculus, Wiley Trans Edition, John Wiley 1981, menguraikan tentang defenisi kekontinuan dan turunan parsial pertama dari suatu fungsi dengan dua peubah pada suatu titik tertentu (x_o, y_o). Di dalam bukunya ini Watson menetapkan syarat - syarat kekontinuan suatu fungsi dengan dua peubah f (x, y) di suatu titik (x_o, y_o), yaitu:

a. $\lim\limits_{\substack{x \to x_c \\ y \to y_o}} f(x,y) = L$
b. $f\ (x_o, y_o)$ harus ada
c. $f(x_o, y_o) = L$

Pada buku ini juga dijelaskan tentang turunan parsial pertama dari fungsi dengan dua peubah f (x, y) baik terhadap variabel x maupun terhadap variabel y.

Apostol T .M. dalarn bukunya berjudul Calculus volume 1 and 2, Inc. 1967 banyak mengulas tentang kekontinuan dan turunan pertama parsial fungsi dengan dua peubah dan contoh – contoh soal kekontinuan dari fungsi dengan dua peubah di suatu titik tertentu.

Widder, D. V., dengan bukunya Advanced Calculus, Inc., 1981, menguraikan tentang turunan parsial fungsi dengan dua peubah.

Dan keseluruhan buku-buku yang menjadi rujukan dalam penelitian ini, terlihat bahwa defenisi maupun uraian tentang kekontinuan dan turunan pertama parsial dari suatu fungsi di suatu titik tertentu pada umumnya adalah sama. Dan perbedaan yang ada hanyalah terdapat dalam cara penulisannya saja. Sehingga defenisi kekontinuan dan turunan pertama parsial dari suatu fungsi dengan dua perubah dapat dinyatakan secara umum sebagai berikut:

Defenisi:

Andaikan f(x, y) suatu fungsi dua peubah x dan y yang terdefenisi pada cakram terbuka T yang berpusat di titik (x_o, y_o), maka:

1. Turunan parsial pertama dari fungsi f (x, y) terhadap perubah x di titik (x_o, y_o). ditulis dengan

   $$\frac{\delta f}{\delta x}(x_o, y_o) \text{ atau } fx\,(x_o, y_o) \text{ dan didefenisikan sebagai:}$$

   $$f_X(x_o,y_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f[(x_o + \Delta x), y_o] - f(x_o,y_o)}{\Delta X}$$

   bilamana limit tersebut ada.

2. Turunan parsial pertama dari fungsi f(x, y) terhadap perubah y di titik (x_o, Y_o)
   dapat ditulis dengan .

   $$\frac{\delta f}{\delta x}(x_o, y_o) \text{ atau } fy\,(x_o, y_o) \text{ dan didefenisikan sebagai:}$$

   $$f_Y(x_o,y_o) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f[(x_{o,}(y_o + \Delta y\,] - f(x_o,y_o)}{\Delta y}$$

   bilamana limit tersebut ada.

3. Fungsi f(x, y) dikatakan kontinu di titik (x_o, y_o) jika
   a. $\lim\limits_{\substack{x \to x_o \\ y \to y_o}} f\,(x, y) = L$
   b. f (x_o, y_o) harus ada
   c. f(X_o, y_o) = L

Dari hasil peninjauan pustaka yang peneliti lakukan tidak terlihat adanya buku-buku sebagai rujukan pada penelitian ini yang menyajikan contoh-contoh penyanggah dalam kasus-kasus kekontinuan dan differensial parsial pertama dari fungsi dengan dua perubah di suatu titik tertentu.

C.PERUMUSAN MASALAH

Dari uraian sebelumnya dapatlah dirumuskan masalah penelitian yang dilakukan sebagai berikut:

Jika suatu fungsi z = f (x, y) adalah fungsi dengan dua peubah yaitu x dan y, maka:

1) Apakah ada fungsi z = f (x, y) yang kontinu di titik (x_o, y_o) tetapi tidak mempunyaii turunan parsial di (x_o, y_o)
2) Apakah ada fungsi z = f (x, y) yang tidak kontinu di titik (x_o, y_o) mempunyai turunan parsial di (x_o, Y_o) dan turunan parsial tersebut tidak kontinu di(x_o, y_o)
3) Apakah ada fungsi z = f (x, y) yang kontinu dan mempunyai turunan parsial di (x_o, y_o) tetapi turunan parsial tersebut tidak kontinu di (x_o, Y_o).

D. TUJUAN PENELITIAN

Berdasarkan permasalahan yang telah diuraikan sebelumnya, maka tujuan pokok dari penelitian ini adalah untuk menunjukkan apakah ada hubungan di antara kekontinuan fungsi dengan dua peubah dengan turunan parsialnya di suatu titik tertentu. Dan apakah dapat ditunjukkan contoh-contoh kasus kritis dalam kekontinuan fungsi dengan dua peubah dengan turunan parsialnya di suatu titik tertentu.

E. MANFAAT HASIL PENELITIAN

Hasil penelitian ini sangat bermanfaat dalam pengembangan pengertian tentang masalah-masalah kritis dalam kalkulus diferensial dan integral khusunya masalah masalah turunan parsial dan kekontinuan suatu fungsi dengan dua peubah. Melalui contoh – contoh dalam penelitian ini akan diketahui adanya kasus – kasus tentang turunan parsial dan kekontinuan suatu turunan dengan dua peubah.

Bab II
METODOLOGI PENELITIAN

Metodologi penelitian yang digunakan di dalam penelitian ini adalah dengan mengamati berbagai fungsi dengan dua peubah $z = f(x, y)$ yang mempunyai masalah kritis di suatu titik tertentu (x_o, y_o) Selanjutnya dengan menggunakan defenisi berikut.

Defenisi :

1. Turunan parsial pertama dari fungsi $z = f(x, y)$ terhadap perubah x di titik (x_o, y_o) dituIis dengan $\frac{\delta f}{\delta x}(x_o, Y_o)$ atau $fx(x_o, y_o)$ dan didefenisikan sebagai:
$$fx(x_o, y_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f[(x_o + \Delta x), y_o] - f(x_o, y_o)}{\Delta x}$$
bilamana limit tersebut ada.

2. Turunan parsial pertama dari fungsi $z = f(x, y)$ terhadap perubah y di titik (x_o, Y_o) dapat ditulis dengan $\frac{\delta f}{\delta y}(x_o, Y_o)$ atau $fy(x_o, y_o)$ dan didefenisikan sebagai:
$$fy(x_o, y_o) = \lim_{\Delta y \to o} \frac{f[x_o, (y_o + \Delta y)] - f(x_o, y_o)}{\Delta y}$$
bilamana limit tersebut ada.

3. Fungsi $z = f(x, y)$ dikatakan kontinu di titik (x_o, y_o) jika
a. $\lim\limits_{\substack{x \to x_o \\ y \to y_o}} f(x,y) = L$
b. $f(x_o, y_o)$ harus ada
c. $f(x_o, y_o) = L$

Dilakukan pengamatan terhadap fungsi-fungsi tersebut. Apabila ternyata dari pengamatan ini fungsi z = f (x, y) kontinu maka dilanjutkan pengamatan apakah fungsi ini mempunyai turunan parsial pertama di titik (x_o, y_o). Jika ternyata fungsi z = (f (x, y) tidak kontinu di titik(x_o, y_o) dilanjutkan dengan pengamatan apakah fungsi ini mempunyai turunan parsial pertama di titik (x_o, y_o). Selanjutnya asing-masing fungsi yang mempunyai turunan parsial di titik (x_o, y_o) diamati pula apakah turunan parsial pertamanya kontinu di titik (x_o, y_o).

Dengan demikian hubungan antara turunan parsial dan kekontinuan fungsi dengan dua peubah dapat diketahui, yaitu apakah ada fungsi dengan dua peubah z = f (x, y) yang kontinu di suatu titik (x_o, y_o) tetapi tidak mempunyai turunan di titik tersebut. Selanjutnya apakah ada fungsi yang tidak kontinu z = f (x, y) di suatu titik (x_o, y_o) tetapi mempunyai turunan parsial pertama di titik (x_o, y_o) dan turunan parsialnya tersebut tidak kontinu di titik (x_o, y_o). Di samping hal tersebut apakah ada fungsi yang kontinu z = f (x, y) dan mempunyai turunan parsial di titik (x_o, y_o) tetapi turunan parsial pertamanya ini tidak kontinu di (x_o, y_o).

Jawaban dari apa yang diteliti merupakan kesimpulan penelitian yang diharapkan.

Bab III
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Dalam penelitian ini akan dilakukan analisis dan pembahasan terhadap fungsi- fungsi dengan dua peubah yang terlebih dulu telah diamati bahwa fungsi tersebut mempunyai masalah kritis di suatu titik tertentu. Penelitian terhadap fungsi-fungsi ini dimaksudkan untuk dapat ditunjukkan hubungan antara turunan parsial pertama dengan kekontinuan dari fungsi tersebut.

Hubungan yang dimaksudkan antara lain :

1. Apakah ada fungsi dengan dua peubah z = f (x, y) yang kontinu di titik(x_o, y_o) tetapi tidak mempunyai turunan parsial pertama di titik itu.

2. Apakah ada fungsi dengan dua peubah z = f (x, y) yang tidak kontinu di titik tertentu (x_o, y_o) mempunyai turunan parsial pertama di titik itu, tetapi turunan parsialnya tersebut tidak kontinu di titik (x_o, y_o).
3. Apakah ada fungsi dengan dua peubah z = f (x, y) yang kontinu di titik tertentu (x_o, y_o) dan mempunyai turunan parsial pertama di titik itu tetapi turunan parsialnya tidak kontinu di titik (x_o, y_o).

Dengan demikian dalam penelitian ini cukup ditunjukkan bahwa ada satu contoh fungsi dengan dua peubah yang memenuhi masing-masing pertanyaan yang diajukan.

Analisa dan pembahasan yang dilakukan terhadap fungsi-fungsi dengan dua peubah yang mempunyai masalah kritis di suatu titik tertentu adalah merupakan objek penelitian.

Untuk memberi jawaban terhadap permasalahan pertama, perhatikan fungsi dengan peubah :

$$z = f(x, y) = (X^2 + Y^2)^{1/2} \text{ ; di titik } M(0, 0).$$

Fungsi z = f (x, y) ini kontinu di titik M (0, 0) karena memenuhi syarat kekontinuan suatu fungsi, bahkan kontinu di setiap titik pada R^2. Untuk jelasnya dibuktikan sebagai berikut:

$$\lim_{(x,y) \to (X\{xo,yo)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \to (O,O)} (x2 + Y11/2 = 0$$

$$f(x0, y0) = f(0,0) = (0^2 + 0^2)^{1/2} = 0$$

$$\text{dan } \lim_{(x,y)\to(x0,y0)} f(X, y) = f(xo, YO) = 0$$

Dengan demikian dapat dilihat fungsi $z = f(X, y) = (x^2 + Y^2)^{1/2}$ adalah suatu fungsi dengan dua peubah yang kontinu di titik M (0, 0), karena memenuhi syarat-syarat kekontinuan suatu fungsi.

Pengamatan dilanjutkan dengan apakah fungsi $z = f(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/2}$ mempunyai turunan parsial pertama baik terhadap peubah x maupun terhadap peubah y

$$\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)_{(x0,y0)} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f[(x0, + \Delta x), y0] - f(x0,y0)}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)_{(x0,y0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x0 + \Delta x)^2 + y^2 0]^{1/2} - (x^2 0 + y^2 0)^{1/2}}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)_{(x0,y0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(\Delta x)^2]^{1/2} -}{\Delta x} = \lim_{\Delta x - 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \text{tidak ada}$$

Jadi jelaslah turunan parsial pertama terhadap Peubah x dari fungsi z = f(x,y) $=(x^2 + y^2)^{1/2}$ tidak ada.

Berikutnya diadakan penelitian terhadap peubah y.

$$\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)_{(x0,y0)} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f[(x_0,(y_0 + \Delta y)] - f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

$$\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)_{(x0,y0)} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[(x^2{}_0 + (y_0 + \Delta y)^2]^{1/2} - (x^2{}_0 + y^2{}_0)^{1/2}}{\Delta y}$$

$$\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)_{(0,0)} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[(\Delta y)^2]^{1/2} -}{\Delta y} = \lim_{\Delta y - 0} \frac{|\Delta y|}{\Delta y} = \text{tidak ada}$$

Dengan demikian fungsi dengan dua peubah z = (X2 + Y1:L-7. kontinu di titik M (0, 0), akan tetapi fungsi tersebut tidak mempunyai turunan parsial baik terhadap peubah x maupun terhadap peubah y. Sehingga dapat dikatakan bahwa:Dapat ditemukan fungsi dengan dua peubah yang kontinu di suatu titik tertentu(xo, yo) akan tetapi tidak mempunyai turunan parsial pertama di titik (xo, Yo).

Selanjutnya untuk menjawab permasalahan kedua, perhatikan fungsi .dengan dua peubah z = f (x, y) sebagai berikut:

$$Z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{X^2 + y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Dilakukan pengamatan terhadap kekontinuan fungsi ini di titik M (0, 0) sebagai berikut :

Teliti kekontinuan $z = \dfrac{xy}{X^2 + y^2}$ di titik M (0, 0).

Untuk ini kita perhatikan keadaan fungsi tersebut di sepanjang sumbu x dan di sepanjang garis y = x ;

Disepanjang sumbu x:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} 0 = 0$$

Di sepanjang garis y = x:

$$L = \lim_{X \to 0} \frac{X^2}{x^2 + x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{2x^2} = {}^1/_2$$

Dengan demikian berarti bahwa Limit f (x,y) di M (x_0,y_0) tidak ada, sehingga salah satu syarat kekontinuan suatu fungsi dengan dua peubah tidak terpenuhi, maka fungsi:

$$Z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{X^2 + y^2} ; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 ; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

tidak kontinu di titik M (0,0)

Kemudian diadakan pengamatan terhadap turunan parsial pertamanya di titik M(0,0) apakah turunan parsialnya ini kontinu atau tidak di titik M (0,0). Turunan parsial pertama terhadap peubah x dari fungsi:

$$Z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{X^2 + y^2} ; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 ; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

adalah :

$$\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)_{(x0,y0)} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f[(x0, + \Delta x), y0] - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)_{(0,0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f[(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0 \text{ ; ada}$$

Sedangkan turunan parsial pertama terhadap peubah y adalah :

$$\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)_{(x0,y0)} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f[(x_0, + \Delta x), y0] - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)_{(0,0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f[(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0 \text{ ; ada}$$

Dengan demikian terbukti bahwa turunan pertama dari fungsi :

$$Z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{X^2 + y^2} ; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 ; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

mempunyai turunan parsial pertama di titik M (0,0).

Sekarang dilanjutkan pula dengan pengamatan terhadap turunan parsial dari fungsii tersebut. Apakah turunan parsialnya tersebut kontinu atau tidak.

Turunan parsial pertama dari fungsi :

$$Z=f(x,y)= \begin{cases} \dfrac{xy}{X^{2+}y^2} & ;(x,y)\neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

dapat dihitung sebagai berikut :
Terhadap peubah x, di (x,y) ≠ (0,0)

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{(x^2+y^2)\,d\,xy - xy\,d\,(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\delta z}{\delta x} = f_x(x,y) = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

Terhadap peubah x jika (x,Y) = (0,0) dengan mudah dilihat adalah $\frac{\delta_z}{\delta_x}$ =0.

Dengan demikian diperoleh turunan parsial pertama terhadap peubah x; yaitu :

$$\frac{\delta z}{\delta x} = f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2} & ;\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ;\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Perhitungan diteruskan untuk turunan parsial terhadap peubah y.

Dalam hal (x,Y) ≠ (0,0) turunan parsial terhadap peubah y adalah :

$$\frac{\delta z}{\delta y} = \frac{(x^2+y^2)\,d\,xy - xy\,d\,(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = f_y(x,y) = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)}\ ;\ (x,y) \neq (0,0)$$

Sedangkan turunan parsial pertama jika (x ,y) = (0,0)

$$\frac{\delta z}{\delta y} = f_y\,(x,\,y) = 0$$

Dengan demikian diperoleh turunan parsial pertama terhadap peubah y, yaitu:

$$\frac{\delta z}{\delta y} = f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2} ; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 ; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Selanjutnya penelitian yang dilakukan terhadap turunan parsial $\frac{\delta z}{\delta x}$ dan $\frac{\delta z}{\delta y}$ apakah Turunan parsial tersebut kontinu di titik M(0,0) atau tidak.

Perhatikan turunan pertama parsial terhadap x.

$$\frac{\delta z}{\delta x} = f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2} ; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 ; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Disepanjang sumbu x (y=0) dapat dilihat bahwa :

$$L = \lim_{(xy)\to(0,0)} fx(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{0^3 - x^2.0}{(x^2+0^2)^2}$$

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{(x^2+0^2)^2}$$

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^4} = 0$$

Disepanjang sumbu y (x=0) dapat dilihat bahwa :

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} fx(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^3-0}{(0^2+y^2)^2} \quad ; (x,y) \neq (0,0)$$

$$L = \lim_{y\to 0} \frac{y^3}{y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y} = \sim$$

Hal ini menunjukan bahwa Limit fx(x,y) di titik M(0,0) tidak ada.

Pengamatan dilanjutkan untuk turunan parsial pertama terhadap peubah y ; yaitu:

$$\frac{\delta z}{\delta y} = f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2} ; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 ; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2} ; (x,y) \neq (0,0)$$

Untuk ini dilakukan pengamatan sebagai berikut :

Disepanjang sumbu x(y = 0), dapat dilihat bahwa :

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 - x.0^2}{(x^2+0^2)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \sim$$

Jadi : L = ~

Disepanjang sumbu y(x=0) dapat dilihat bahwa :

$$L = \lim_{y \to 0} \frac{0-0}{(0^2+y^2)^2} = \lim_{y \to 0} \frac{0}{y^4} = 0$$

Dari hasil pengamatan ini berati L tidak ada. Karena salh satu syarat kekontinuan tidak ditemui maka turunan parsial pertama terhadap peubah x maupun terhadap peubah y tidak kontinu di titik M(0,0).

Dengan demikian dari hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan terhadap fungsi dengan dua peubah :

$$z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} ; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 ; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Menunjukkan bahwa ada fungsi dengandua peubah yang tidak kontinu di suatu titik (x0,y0) mempunyai turunan parsial pertama di titik tersebut akan tetapi turunan parsial pertama tersebut tidak kontinu di titik (x0,y0).
Tugas berikutnya adalh permasalahn ketiga, yaitu apakah ada fungsi dengan dua peubah yang kontinu dan mempunyai turunan parsial pertama di suatu titik (x0,y0) akan tetapi turunan parsialnya tidak kontinu di titik (xo,y0).

Untuk ini diperhatikan fungsi z = f(x,y) sebagai berikut:

$$z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} ; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 ; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Sekarang fungsi ini diteliti kekontinuannya di titik M(0,0)

Diketahui bahwa :

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| = \frac{x^2}{x^2+y^2} \, |y| \leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} \, (x^2+y^2)^{1/2} = (x^2+y^2)^{1/2}$$

Sehingga dapat dituliskan :

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq (x^2 + y^2)^{1/2}$$

Atau

$$-(x^2 + y^2)^{1/2} \leq \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \leq (x^2 + y^2)^{1/2}$$

Karena:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} -(x^2+y^2)^{1\backslash 2} = 0 \text{ dan } \lim_{(x,y) \to (0,0)} +(x^2+y^2)^{1\backslash 2} = 0$$

Maka diperoleh :

$$L = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0 \text{ ; ada}$$

Dari :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} ; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 ; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Dapat dilihat bahwa f (x0,y0) = f(0,0)=0 di titik M (0,0), sehingga dipenuhi syarat kontinu, yaitu:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = f(x_o,y_o)$$

Hal ini berarti bahwa fungsi:

$$z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} ; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 ; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Kontinu di titik M (0,0)

Langkah berikutnya diteliti apakah fungsi tersebut mempunyai turunan parsial pertama di titik M (0,0). Untuk itu perhatikan, pertama-tama turunan parsialnya terhadap x:

$$\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)_{(x_0, y_0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f[(x_0 + \Delta x), y_0] - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)_{(0, 0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x}$$

Dan turunan parsial pertama terhadap peubah y adalah sebagai berikut :

$$\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)_{(x_0,\,y_0)} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f[x_0,(y_0+\Delta y)] - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

$$\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)_{(0,\,0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0,\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0-0}{\Delta y} = 0 \text{ ; ada.}$$

Dengan demikian fungsi :

$$z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Mempunyai turunan parsial pertama di titik M(0,0) baik terhadap peubah x maupun peubah y.

Langkah terakhir adalah perlu diamati apakah turunan parsialnya pertama ini kontinu atau tidak di titik M(0,0). Untuk itu dilakukan perhitungan sebagai berikut :

Perhatikan :

$$Z = f(x,y) = \frac{x^2 y}{X^2+y^2} \quad ; (x,y) \neq (0,0)$$

$$\frac{\delta z}{\delta x} = fx(x,y) = \frac{(x^2+y^2)\, dx^2 y - x^2 y\, d\,(x^2+y2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\delta z}{\delta x} = fx(x,y) = \frac{2x^3 y + 2xy^3 - 2x^3 y}{(x^2+y^2)^2}$$

Diperoleh :

$$\frac{\delta z}{\delta x} = fx(x,y) = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2};(x,y) \neq (0,0)$$

Selanjutnya dihitung turunan parsial pertama terhadap peubah y dari fungsi :

$$\frac{\delta z}{\delta y} = fy\ (x,y) = \frac{(x^2+y^2)dx^2y - x^2yd\ (x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = fy\ (x,y) = \frac{x^4+x^2y^2 - 2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Dari sini diperoleh :

$$\frac{\delta z}{\delta y} = fy\ (x,y) = \frac{(x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}; (x,y) \neq (0,0)$$

Sedangkan turunan parsial pertama pada peubah x maupun peubah y (x,y) = (0,0) dengan mudah dapat dilihat adalah

$$\frac{\delta z}{\delta y} = fx\ (x,y) = fx(0,0) = 0$$

Dan

$$\frac{\delta z}{\delta y} = fx\ (x,y) = fy(0,0) = 0$$

Dengan demikian turunan parsial dari fungsi tersebut, yaitu :

$$\frac{\delta z}{\delta x} = f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} & ;\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ;\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Dan

$$\frac{\delta z}{\delta y} = f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & ;\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ;\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Berikutnya dilakukan penelitian apakah turunan parsial ini kontinu di titik (0,0). Untuk ini pertama-tama diperhatikan $\frac{\delta z}{\delta y}$,

$$\frac{\delta z}{\delta x} = f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} & ;\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ;\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Disepanjang garis x = 0.

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} fx(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{(0^2+y^2)^2}$$

$$L = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^4} = 0$$

Di sepanjang garis y=x,

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} fx\ (x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{2x^4}{X^2+x^2)^2} = {}^{1/2}$$

Dari hasil ini jelas bahwa limit fx(x,y) di titik M(0,0) tidak ada

Selanjutnya dilakukan penelitian terhadap turunan parsial terhadap y di titik M(0,0) sebagai berikut :

$$\frac{\delta z}{\delta y} = fy(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - x^2\ y^2}{(x^2+y^2)^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Diadakan pengamatan disepanjang garis x = 0 :

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} fx\ (x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{0^2+y^2)^2}$$

$$L = \lim_{y\to 0} \lim \frac{0}{y^4} = 0$$

Sedangkan di sepanjang garis y = 0 :

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} fy\ (x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{x^4 -0}{x^2+0^2)^2}$$

$$L = \lim_{x\to 0} \lim \frac{x^4}{x^4} = 1$$

Karena itu jelas bahwa limit fungsi fy(x,y) di titik M (0,0) tidak ada.

Dengan demikian turunan parsial pertama dari fungsi dengan dua peubah :

$$Z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{X^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Tidak kontinu di titik M(0,0), baik turunan parsial terhadap peubah x maupun terhadap peubah y.

Ini berarti ada fungsi z = f 9x,y) yang kontinu di titik (x0,y0) dan mempunyai turunan parsial pertama di titik (x0,y0) akan tetapi turunan parsial pertamanya tersebut tidak kontinu di titik (x0,y0).

Dari hasil analisa dan pembahasan yang telah dilakukan terhadap ketiga contoh fungsi dengan dua poeubah di suatu titik tertentu (x0,y0), dapat dirangkum hal– hal sebagai berikut :

Ada fungsi dengan dua peubah yang kontinu di suatu titik tertentu akan tetapi tidak mempunyai turunan parsial pertama di titik tersebut. Dan ada fungsi dengan dua peubah yang tidak kontinu di suatu titik tertentu mempunyai tuunan parsial pertama di titik tersebut akan tetapi turunan parsial pertamanya tidak kontinu di titik tersebut. Sebaliknya ada fungsi dengan dua cara peubah yang kontinu di suatu titik tertentu, mempunyai turunan parsialnya tidak kontinu di titik itu.

Ini menunjukkan bahwa suatu fungsi dengan dua peubah yang kontiinu di suatu titik tertentu tidak hubungan dengan ada- tidaknya turunan parsial pertamanya di titik tersebut. Demikian pula tidak hubungan dengan adanya turunan parsial dari suatu fungsi kontinu atau tidaknya turunan parsialnya tersebut.

BAB IV
KESIMPULAN

Dari hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan sebelumnya dapat ditarik beberapa kesimpulan sebagai hasil dari penelitian yang dilakukan. Hasil penelitian yang diperoleh dapat dilaporkan sebagai berikut.

1. Dapat ditemukan fungsi dengan dua peubah z = f(x,y) yang kontinu disuatu titik
   (x0,y0) tetapi tidak mempunyai turunan parsial di titik (x0,y0).
2. Dapat ditemukan suatu fungsi dengan dua peubah z= f(x,y) yang tidak kontinu di titik tertentu (x0,y0) dan mempunyai turunan parsial di titik (x0,y0), akan tetapi turunan parsialnya tidak kontinu di titik (x0,y0).
3. Dapat ditemukan fungsi dengan dua peubah z=f(x,y) yang kontinu ke suatu titik tertentu (x0,y0) dan mempunyai turunan parsial pertama di titik (x0,y0) akan tetapi turunan parsialnya tidak kontini di titik (x0,y0).
4. Kekontinuan suatu fungsi dengan dua peubah disuatu titik tertentu tidak ada hubungannya dengan ada-tidaknya turunan parsial fungsi tersebut di titik itu.
5. Kekontinuan suatu fungsi dengan dua peubah di suatu titik tertentu tidak ada hubungannya dengan kontinu tidaknya turunan parsialnya di titik tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Artur B. Simon,*First Year Calkulus*, The Macmillan Company,New York, 1996

Apostol, T.m., *Calculus Volume 1 And 2* ,2 nd Edition, Jhon Wiley dan Sons, Inc., 1967

Gupta, S.L dan Rani, *Fundamental Real Analysis*, 2 nd edition,Vikas Publishing House, Ltd, 1975.

James R. Evaus, *Fundamental of Calculus*, West Publishing Company, New York, 1985.

Leithold L., *The Calculus with Analytic Geometry*, 4th edition Harvard & Row Publishes, New York, 1995.

Martono, K., *Kalkulus dan Ilmu-Ilmu Analitik*, Angkasa, Bandung, 1985.

Piskunov, N., *Diffrential and Integral Calculus*, Peace Publisher, Moscow, 1981.

Watson Fulks, *Advanced Calculus*, *Wiley* Trans-Edition, John Wiley, 1981.

Widder, D.V., *Advanced Calculus*, 2nd edition, Prentice Hall of India, New Delhi , 1981.

