

Soal 4. Angka 1, 2, 3, ..., 9 dituliskan pada sebuah lingkaran secara acak. Buktikan bahwa ada 3 bilangan berdekatan yang jumlahnya lebih dari 15.

PENYELESAIAN MASALAH

(By Raja Octovin, SMA Negeri 1 Pekanbaru)

Kita buktikan dengan kontradiksi.

Asumsikan bahwa setiap tiga bilangan berurutan jumlahnya kurang dari 15. Maka misalkan kesembilan bilangan sembarang tersebut $a, b, c, d, e, f, g, h, i$. Karena setiap tiga bilangan jumlahnya kurang dari 15, kita tulis

$$a + b + c < 15$$

$$b + c + d < 15$$

$$c + d + e < 15$$

$$d + e + f < 15$$

$$e + f + g < 15$$

$$f + g + h < 15$$

$$g + h + i < 15$$

$$h + i + a < 15$$

$$i + a + b < 15$$

Jumlahkan semua pertidaksamaan tersebut, sehingga kita peroleh ekivalennya yaitu

$$3(a + b + c + d + e + f + g + h + i) < 9 \times 15$$

Akibatnya

$$3\left(\frac{9 \times 10}{2}\right) < 9 \times 15$$

$$45 < 45$$

Kontradiksi.

Maka, ada 3 bilangan berurutan yang jumlahnya ≥ 15 .

Sekarang kita akan buktikan bahwa jika ada tiga bilangan berurutan $a + b + c = 15$, maka ada x, y, z di antara d, e, f, g, h, i sehingga $x + y + z > 15$.

Misalkan ada bilangan p di kiri a dan q di kanan c .

Jika $p > c$, maka $p + a + b > 15$.

Jika $q > a$, maka $q + b + c > 15$.

Jika $p < c$ dan $q < a$, maka asumsikan k, l, m, n ada bilangan yang lain.

Namun, $k + l + m + n \geq 24$ yang berarti jika tiga bilangan dipilih, pasti ada yang jumlahnya > 15 .
Terbukti.