Soal 1. Carilah semua pasangan bilangan asli (x, n) yang memenuhi

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = 40$$

SOLUSI

(By Raja Octovin, SMA Negeri 1 Pekanbaru)

Kedua ruas kita kalikan $x - 1$ sehingga

$$(x-1)(x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) = 40(x-1)$$

Akibatnya, kita peroleh

$$x^{n+1} - x^n + x^n - x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^2 - x + x - 1 = 40x - 40$$

Ini bersifat teleskopik sehingga

$$x^{n+1} - 1 = 40x - 40$$

Kedua ruas kita tambah 1 sehingga

$$x.x^n = 40x - 39$$

Karena $x \neq 0$, maka

$$x^n = 40 - \frac{39}{x}$$

Karena x bilangan bulat, berarti x habis membagi 39.

Kemungkinan untuk x adalah 1, 3, 13, dan 39.

Kasus 1.

Untuk $x = 1$, perhatikan bahwa

$$1^n = 40 - \frac{39}{1} = 1$$

Tinjau kembali persamaan

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = n + 1$$

untuk $x = 1$.

Akibatnya

$$n + 1 = 40$$

$$n = 39$$

Salah satu penyelesaiannya adalah (1,39).

Kasus 2.

Untuk $x = 3$, maka

$$3^n = 40 - \frac{39}{3} = 40 - 13 = 27$$

Karena n bilangan bulat, maka $n = 3$. Salah satu penyelesaiannya (3,3).

Kasus 3.

Untuk $x = 13$, maka

$$13^n = 40 - \frac{39}{13} = 40 - 3 = 37$$

Tidak ada penyelesaian.

Kasus 4.

Untuk $x = 39$, maka

$$39^n = 40 - \frac{39}{39} = 39$$

Akibatnya $n = 1$. Salah satu penyelesaiannya (39,1).

Maka, pasangan bilangan asli (x, n) yang memenuhi persamaan

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = 40$$

adalah $(1, 39), (3,3), (39, 1)$.

Kita uji kembali ke persamaan, memenuhi.